让数学课远离虚伪的美丽

315700 浙江省象山县教科研中心 童晓群

随着新课程的实施, 数学课堂生机勃勃. 但是, 我们在看到很多教师大胆创新、追求教学风格的同时, 也会发现不少教师缺乏理论学习与分析, 盲目追随攀比与模仿, 在课堂上要弄花拳绣腿. 这种虚伪的美丽, 表面上可能一时给人以新鲜之感, 实则把数学教学改革引入误区. 以下几种情况比较突出.

一、千篇一律的情境设计

新课程特别倡导用具体的、有趣的、富有挑战性的素材引导学生投入数学活动. 近几年来, 笔者听了许多课例, 几乎全是千篇一律的情境设置. 因此, 笔者提出这样的问题: "情境设置"是否应当被看成数学教学中引入课程内容的惟一合理的方法, 以致在任何情况下都不应采取其他的方法?

案例1. 教学内容: 棱柱; 学生: 高一年级.

为了引出"棱柱"这一概念, 施教者在课前休息时, 播放了一段风光片"象山花岙岛的石林"(有许多大小石柱). 开课后, 老师又展示了生活中许多关于棱柱的图片, 其中有建筑物、生活用品等. 最后老师问学生: "你们都看到了什么?" 在得到了"棱柱"这一老师最渴望得到的回答后, 再要求学生分成四人一组讨论, 举几个现实生活中有关棱柱的模型. 一时间, "橡皮擦"、"粉笔盒"、"电视机"、……, 铺天盖地而来, 整堂课气氛非常活跃. 最后师生一起讨论得出这些几何体的共性——"棱柱"的定义.

上述的教学处理, 无疑会让学生感到有趣和新鲜. 但是, 由于"棱柱"的概念, 学生在初中时已经有了初步的感知, 因此, "有没有必要花费那么多的时间和精力去制作幻灯片, 让学生感受棱柱的实际模型?" 笔者认为:

(1) 一个好的情境应该始终贯穿于教学内容, 而本例设计的教学情境仅仅起到"敲门砖"的作用, 即仅仅满足于学生的兴趣, 调动学习积极性, 没有深层次的挖掘与反思.

(2) 我们不能狭隘地把数学活动理解成最低层次的情境教学. 在本例中, 情境的设置冲淡了本节课的主要目标, 本节课应以培养学生用数学的语言来表达和交流的能力为主要目标. 倘若我们在上课时单刀直入地提出: "你们知道什么叫棱柱吗?" 为了更好地让学生把头脑中朦胧藏匿的棱柱概念凸现出来, 我们用"画图形表述你脑中的棱柱体——用文字描述你脑中的棱柱体——用数学语言定义你脑中的棱柱体"这三部曲来构建我们课堂主框架, 无疑这样的设计能更好地体现教学活动的高效性.

二、流于表层的合作学习

对于合作学习的提倡, 这是新一轮数学课程改革的又一主要特征, 但事实上, 目前有许多老师所使用的合作学习(特别是公开课), 仅仅流于表层, 部分教师甚至把合作学习等同于小组讨论, 以此换得课堂上的热热闹闹.

案例2. 教学内容: 中位数与众数; 学生: 初二年级. 授课者以阿冲应聘为情景: 阿冲得到两公司的月工资报表如下:

甲公司:

员工	经理	副经理	职员A	职员B	职员C	职员D	职员E	职员F	职员G
月薪(元)	6000	4000	1600	1300	1200	1100	1100	1100	600

乙公司:

员工	经理	副经理	职员A	职员B	职员C	职员D	职员E	职员F	职员G	职员H
月薪(元)	10000	2000	1600	1400	1000	1000	1000	1000	500	500

假如你是阿冲, 你应该选择哪家公司, 为什么?

在教学过程中, 教师首先让学生分成四个小组讨论, 然后各小组汇报, 说明理由, 最后师生共同研究得出中位数与众数的概念, 整节课课堂气氛非常活跃.

无庸置疑, 这是一个融“生活化”与“数学化”为一体的优秀的情境设置, 有利于学生经历观察、感受、思辨、决策等过程. 在思考、探索、交流过程中获得对概念的体验和理解. 然而, 在为这个情境设置叫好的同时, 我们也应该清楚的意识到: 第一、合作交流具有多种形式, 我们不要动辄搞小组讨论, 有些问题无法经过讨论统一的无需进行小组讨论. 本例中, 因为评判的标准不同, 选择的结果就不同, 笔者参加的小组就有两位同学, 一位相信自己的能力, 将来必当经理而选择乙公司, 另一位同学认为初进公司必定拿该公司的最低档工资而选择甲公司, 两人争得面红耳赤. 第二、合作交流必须建立在明确分工, 互助性学习的基础上. 在本例中, 由于讨论的内容是浅层次的、低水平的决策, 缺少互助性学习的素材, 因此, 给人以表面的“积极性”和“一切顺利”的假象. 最后汇报时, 由几个成绩好一点的学生说了算, 以小老师代替大老师, 长此以往, 会造成新的两极分化. 第三、合作交流必须建立在独立思考的基础上, 没有经过个体精思而匆忙展开的讨论如无源之水, 表达的见解既不成熟也不具备深度, 更谈不上个性和创新. 本例中, 若让学生独立思考, 然后再进行全班交流, 根据交流的观点, 实行“同质分组”, 各组自找标准, 论证自己的决策正确, 这样的小组讨论, 其优越性才能得到充分的发挥.

三、苍白无力的数学文化

数学作为一种文化现象, 新教材提倡体现数学的文化价值, 并在适当的内容中提出对“数学文化”的学习要求. 然而, 在日常教学中, 谈到数学文化, 往往只联想到数学史. 宏观地观察数学, 从历史上考察数学的进步, 确实是揭示数学文化层面的重要途径, 但是, 除了这种宏观的历史考察之外, 我们恰恰忽视了微观的一面, 即从具体的数学概念、数学方法、数学思想中揭示数学的文化底蕴.

案例3. 教学内容: 两角和的余弦公式; 学生: 高一年级.

为了突出数学文化的严谨性, 教师设置了如下的情境: 前苏联教材对于两角和的余弦公式给出了以下证明方法:

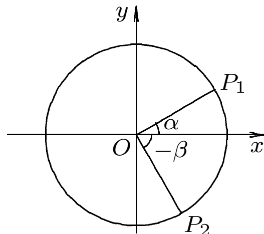


图 1

如图1, 单位圆中, $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $P_2(\cos\beta, -\sin\beta)$,

由两点间的距离公式

$$|P_1P_2|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

另一方面, 在$\triangle P_1OP_2$中, 由余弦定理

$$|P_1P_2|^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta). \quad (2)$$

由(1)、(2)可得

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (3)$$

试讨论以上证明正确吗?

事实上, 以上的证明因为用到三角形中的余弦定理, 因此公式(3)仅适用于角α、β等于锐角的情形, 将此证明作为α、$\beta \in \mathbf{R}$时的证明, 显然有悖于数学科学探索的严谨性.

数学教育如何贯穿人文主义精神, 包括担当德育的重任, 当前这方面的研究非常薄弱. 在本例中, 授课者以教学的严谨性为主线, 展开教学研究, 可谓独具匠心, 然而, 严谨性也是一把双刃剑, 过度的强调严谨性, 必将扼杀开拓与创新, 问题是如何把握一个“度”字.

例如, 在进行复利教学时, 为了对学生进行阶级教育, 某教师把该课的课题定为“杨白劳为什么可以借钱不还?”. 课后许多听课教师和学生难以接受.

又例如, 在讲圆周率时, 我们总是局限于祖冲之计算圆周率比西方早多少年, 大搞狭隘

(下转第10–34页)

呼唤数学教育的定量研究

235000 安徽省淮北市第一中学 周恩超

统计素养就是人们对统计数字所具有的悟性, 用统计理论和思想指导个人实践以适应社会需要的素养. 良好的统计素养应体现在以下四个方面:

1. 具有统计意识, 即对统计的重要性有足够的认识, 懂得统计是从事任何活动都不可缺少的一种有效手段. 有了这种意识, 才会提高对统计数字的敏感性, 凡事才能够从统计的角度去认识、去判断、去分析和解决.

2. 能够读懂统计资料, 了解常用的社会统计指标的含义.

3. 具有科学的统计学知识, 并能运用统计方法分析和解决实际问题.

4. 能够领悟统计理论中所蕴涵的哲理即统计理念, 主要包括: 数量观念、变量观念、不确定性观念等.

《普通高中数学课程标准(实验)》[1]指出: "现代社会是信息化社会, 人们常常需要收集数据, 根据所获得的数据提取有价值的信息, 做出合理的决策. 统计是研究如何合理收集、整理、分析数据的学科, 它可以为人们制定决策提供依据. …… 因此, 统计与概率的知识已经成为一个未来公民的必备常识."[2] 新课程的这一提法, 既有其社会的现实背景, 也有国际数学教育发展趋势的背景.

20世纪50年代国际统计学会(ISI)就已经决定要在世界各国的各级学校努力推进并开展统计学的教学, 80年代以来, 全球范围的"把统计和概率的初步知识作为数学基本素养的一部分而引入中学甚至小学课程这一运动正在升温与蔓延" (参见Garfield & Ahlgren, 1988, P.44)[3].

新课程增加了新的内容, 同时对原有内容的编排和要求也有了新的变化, 这给教师提出了挑战. 面对挑战, 数学教育领域有许多问题值得研究.

例如, 数学教育的功能研究——数学素质与数学应试能力的相关研究等; 数学教学中的德育研究——调查教学对学生世界观影响的功能等; 数学学习心理研究——创设良好的数学教学心理氛围与提高数学教学质量相关关系的研究等; 数学方法论研究——学生"用数学"意识和能力的形成机制以及培养途径的实验研究等等.

但是, 我国数学教育领域发表的论文中解题类型居多, 调查实验类型少, 在调查实验类论文中, 统计工具过于简单. 通过下面的统计数据我们可以窥见一斑.

《数学教育学报》作为国内数学教育领域高层次的学术期刊, 所刊载的文章所运用数学方法的现状, 在一定程度上反映了我国数学教育研究中运用数学方法的现状.

以《数学教育学报》自1992年12月创刊号至2004年底共45期刊载的文章作文献源. 统计表明, 在这期间刊载的论文中运用数学方法的文章占年度总文章的百分比分别为: 11.1%、12.5%、14.4%、8.4%、10.5%、20%、35.4%、23.98%、13.98%、18.34%、10.7%、19.8%、15.9%[3].

在这些文章中所使用的数学方法又有所不同, 下面就1992.12～2004.12期间《数学教育学报》所刊载的这类文章进行分类统计:

《数学教育学报》刊载的运用数学方法的文章统计.[4]

(1992创刊～1996(2)共计11期)

方法	篇数	百分比
简单统计 (表格、百分数、平均数)	28	10.81%
简单统计分析 (方差、相关性、假设检验)	8	3.08%
较高级分析 (因素分析、聚类分析等)	3	1.16%

表 1

《数学教育学报》刊载的运用数学方法的文章统计.[5]

(1996 (3) ~ 2001 (4) 共计22期)

方法	篇数	百分比
简单统计 (表格、百分数、平均数)	68	11.45%
简单统计分析 (方差、相关性、假设检验)	42	7.02%
较高级分析 (因素分析、聚类分析等)	7	1.18%

表 2

《数学教育学报》刊载的运用数学方法的文章统计.

(2002 (1) ~ 2004 (4) 共计12期)

方法	篇数	百分比
简单统计 (表格、百分数、平均数)	28	8.43%
简单统计分析 (方差、相关性、假设检验)	26	7.83%
较高级分析 (因素分析、聚类分析等)	5	1.51%

表 3

从以上表中可以看出, 在所刊载的45期《数学教育学报》中, 前11期有15.05%、中段22期有19.65%、后12期有17.77%的文章使用了数学方法. 同时我们发现, 使用高级的数学手段来分析的文章比例有所增加(如3.08%、7.02%、7.83% 及1.16%、1.18%、1.51%). 尽管如此, 但总体来说这些比例仍然偏小, 并且在所使用的数学方法中, 依然是以简单统计为主. 至于在中学数学的有关刊物中, 关于调查实验研究的论文更是凤毛麟角. 但最近几年, 这种状况已经得到较大改观.

造成以上现状的原因有很多, 笔者认为其中有一个重要原因是缺乏较深的统计学知识. 不少老师有着丰富的教学经验, 可这毕竟是一种个人体会, 难以洞察数学教育中复杂现象之间的关系及问题的实质. 要揭示这些现象的内在规律, 就需要利用一些相关的统计工具. 例如, 研究数学教育各因素之间的关系一般需要如下统计学知识: 相关分析、方差分析、回归分析、主成分分析、因素分析等等. 这说明有很多统计学知识需要我们进一步学习和提高.

参考文献

[1]《普通高中数学课程标准(实验)》. 中华人民共和国教育部制定. 人民教育出版社. 2003.

[2] 叶尧城主编. 高中数学课程标准教师读本. 华中师范大学出版社. 2003. 9.

[3] 李俊著. 中小学概率的教与学. 华东师范大学出版社. 2003. 5.

[4] 张国杰、王光明著. 数学教育研究与写作. 华东师范大学出版社. 2003. 5.

[5] 陈瑶、李善良. 数学教育学报. 2002. 11(1): 32–35.

(上接第10–11页)

立, 记作$p \Rightarrow q$." (摘自教材P.34)

2. 关于"充分条件"和"必要条件"

由$p \Rightarrow q$, 则p是q的充分条件, q是p的必要条件, 是p成立的必然结果.

"闪光的"是一个很大的范围, 有金子、玻璃、银片、铜片、太阳、星星等.

"金子"是一个相对独立的个体. 它们之间是"金子"包含于"闪光的", 可表示为金子$\subseteq$闪光的.

有个成语叫"半斤八两". 半斤就是八两; 而八两就等于半斤. 则半斤$\Rightarrow$八两, 八两$\Rightarrow$半斤. 半斤是八两的充分条件, 也是其必要条件. 八两是半斤的必要条件, 也是其充分条件; 可表示为: 半斤 = 八两, 由此, 可得出:

$p \Rightarrow q$ 则 $p \subseteq q$;

$p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ 则 $p = q$.

这是从集合观点对"充分条件"、"必要条件"及"充要条件"进行概括.

以上摘录的学生数学作文, 读来也许会尚嫌稚嫩, 但是, 记录的是学生的所思所想. 流畅的师生交流渠道, 将使教学更有针对性.

让我们从实际应用中“寻找”应用题

130031 吉林省长春市教育局教研室 李春花 长春市第一外国语中学 王曾仪

实施课程改革以来, 各地涌现出大批有助于培养学生应用意识的好题目. 不过也还存在一些不尽人意的情况, 表现为: 有些题目作表面文章, 外表似乎很联系实际, 实际上却脱离实际.

下面是这两年的中考题中的例子.

例1 数学教师对小明在参加高考前的5次数学模拟考试进行统计分析, 判断小明的数学成绩是否稳定, 于是教师需要知道小明这5次数学成绩的 ……………………………( )

(A) 平均数或中位数;(B) 方差或极差;

(C) 众数或频率; (D) 频数或众数.

中考题考查学生对平均数、方差等概念的理解情况, 这完全是应该的. 可是, 这道题目却使人想起诗句“少年不知愁滋味, 爱上层楼, 爱上层楼, 为赋新词强说愁”. 因为计算一名学生或全体学生五次模拟考试成绩的方差或极差的意义实在不大.

例2 小李家住房的结构如图1所示, 小李打算把卧室和客厅铺上木地板, 请你帮他算一算, 他至少要买多少平方米的木地板?

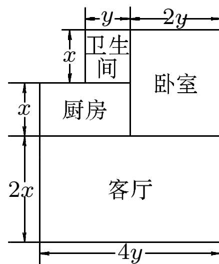


图 1

(A) $12xy$; (B) $10xy$;

(C) $8xy$; (D) $6xy$.

本题取材于改革开放以来城市居民住房面积不断增大, 立意很好, 可是对图形的设计却有些“想当然”了.

试想, 按照所给图形, 当客人需要“方便”时, 必须穿过主人的卧室或厨房, 这样的设计未免太不高明了吧!

况且, 按照所给图形能否求出地板的面积, 也经不起推敲, 因为忽略了墙壁的厚度. 如果把图中的两个“x”分别看作卫生间和厨房使用面积的长与宽, 则卧室使用面积的长应大于$2x$; 若图中的两个“x”分别表示卫生间和厨房建筑面积的长与宽, 也应对铺设地板的面积作进一步的假设或限定.

应该说明, 这道题是某一版本的义务教育课程标准实验教科书中一道题的改编题, 图形与原书的图形一样. 这说明该教科书中也存在着有待改进的问题.

例3 在全国抗击“非典”的斗争中, 黄城研究所的医学专家们经过日夜奋战, 终于研制出一种治疗非典型肺炎的抗生素. 据临床试验观察……

这段文字取自于2003年某市的一道中考题. 在“非典”肆虐的那段日子里, 抗生素抗不了“SARS”, 这决不是只有医务人员才知道的事情, 中考题中出现这样的失误, 我们应该引以为戒.

在数学教学中编题注意设置实际背景, 这无疑是正确的. 《全日制义务教育数学课程标准》指出, 面对新的数学知识时, 应该能“主动地寻找其实际背景”, 我们认为这里的“寻找”二字使用得非常恰当, 它是对穿靴戴帽、生搬硬套、人为编造的否定(但不排除“寻找”后的整理和科学、合理地提炼), 教师不仅应该引导学生去“寻找”, 还应该亲自去“寻找”.

新课程背景下空间思维障碍的突破

226531 江苏省如皋石庄高级中学 姜建平

立体几何是高中数学的一个重要内容, 从平面几何到立体几何是一道难度较高的台阶, 立体几何成了中学生高中数学学习的一道障碍, 学生们对立体几何的学习倍感畏惧. 究其原因: (1) 学生沿袭平面几何的思维, 缺乏空间想象力; (2) 立体几何图形"失真", 给学生观察图形造成障碍. 因此, 培养学生空间想象力, 突破空间思维上的障碍, 是学好立体几何的关键. 就此, 笔者谈一点体会.

一、设计实验, 在观察中突破

乌申斯基说:"直观的教学不是以抽象的概念和词语为依据, 而是以学生的直接感知的具体形式为依据的." 因此, 引导学生有意识地使用立体几何模型, 是顺利地进入立体几何之门的钥匙. 这里所说的模型并不仅指教学使用的立体几何教具, 还指学生人人都有的桌面、书本、笔、手掌(表示平面)、手指(表示直线)、打开的书本(表示二面角)等等. 善于使用这些现成可得、可看、可变的模型, 可以使许多立体几何问题变得比较直观, 从而使学生在观察、思考和总结中突破难点.

如:"一个二面角的两个面与另一个二面角的两个面分别垂直, 这两个二面角的大小关系是什么?" 此题仅靠空间想象很难得出结果, 作图又较难, 且作出的图形是不会运动的(模型是可以运动的), 要作出各种情况下的图形既费时, 图形也难画, 另外学生往往还会依据平面几何中一个类似的结论而去习惯性思维, 得出"相等或互补"的错误结果, 因此可设计这样一个实验: 让学生自己动手, 用两本打开的书本比划一下, 结论很快就可以得到(两个角没有任何关系). 这一教法, 融知识性和趣味性于一体, 形象、直观, 突破解题障碍, 提高了学生的学习兴趣, 培养了他们的空间想象力.

二、注重识图、作图, 在感悟中突破

识图和作图教学是培养学生空间想象力的重要途径之一. 识图、作图能力是空间想象力的组成部分. 在我们工作中常遇到这种情况, 学生把题目看了几遍, 但仍然画不出适合题意的图形以辅助解题.

识图、作图训练可从以下两方面进行:

1. 用直观教具与实物, 培养识图、作图能力

作图和识图有着密切的关系, 如果学生的识图能力差, 就很难画出所需要的图形. 在立体几何教学中, 应特别注意利用实物和模型, 帮助学生认清点、线、面之间的关系, 增强感性认识, 加深对理论的理解. 学生识图、作图能力的提高, 意味着他们在空间的抽象思维能力有了提高.

2. 通过解剖图形, 提高识图、作图能力

立体几何图形是由点、线、面这些基本元素通过一定的关系组合而成, 这种关系到了空间已经较平面上发生了很大的变化, 不熟悉、不适应这种变化, 是学生从平面几何进入到立体几何学习的一个障碍. 如果能将元素按照题意组合成几何图形, 又能将图形分解成部件(有简单关系的基本元素的几何体), 也就能将复杂问题分解为熟悉的简单问题加以解决.

案例1 求证: 在已知二面角内, 从二面角的棱引出的一个半平面内任意一点到二面角两个面的距离之比是一个常数.

分析: 如图1、2, 把平面角从立体图形中"切"出来, 易发现$\angle ADB$与$\angle ADC$是定量, 从而获得解题线索.

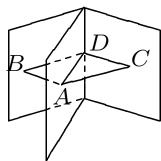


图 1

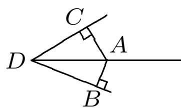


图 2

在立体几何问题中, 若作出的图形较复杂, 线面关系不易寻找, 则可引导学生进行图形解剖, 把一个复杂的图形分解为几个简单的常见图形, 并联想以往知识, 寻找解题线索, 这对进一步提高学生的识图能力有很大帮助.

3. 介绍基本作图方法, 直接训练作图能力

画空间图形的直观图, 首先要画好平面, 尤其是相交的平面, 另可引导学生总结一些基本方法和作图顺序, 使他们明确画图要领, 掌握画法和程序. 画结构比较复杂的几何直观图, 应要求学生先根据文字描述进行空间想象, 在脑海中形成一个基本图形, 然后画出草图, 大致确定图形的形状、大小和元素间的位置关系, 分清哪些是可见的轮廓线, 哪些是不可见的, 最后再画出正式的直观图. 直观图的作图顺序是由前到后、先线后面、保持平行、实虚分明.

三、突出转化, 在应用中突破

立体几何中所蕴含的数学思想方法非常丰富, 其中最重要的就是转化的思想方法, 它贯穿立体几何教学的始终;在立体几何教学中占有很重要的地位. 立体几何中的转化主要是空间问题向平面问题的转化, 具体从以下几个方面着手.

1. 位置关系的转化

线线、线面、面面平行与垂直的位置关系是立体几何中的一个重点内容, 其精髓就是平行与垂直位置关系的相互依存及转化, 平行与垂直问题不但能横向转化, 而且可以纵向转化.

案例2 设矩形 $ABCD$, E、F 分别为 AB、CD 的中点, 以 EF 为棱将矩形折成二面角 $A-EF-C'$ (如图3).

求证: 平面 $AB'E/\!/$ 平面 $DC'F$.

分析一(纵向转化): $\because$ $AE/\!/DF$, $AE\not\subset$ 平面 $DC'F$, $\therefore$ $AE/\!/$ 平面 $DC'F$.

同理, $B'E/\!/$ 平面 $DC'F$.

又 $AE\cap B'E=E$,

$\therefore$ 平面 $AB'E/\!/$ 平面 $DC'F$.

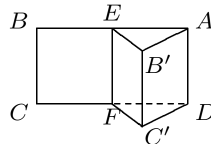


图 3

分析二(横向转化): $\because$ $AE\perp EF$, $B'E\perp EF$, 且 $AE\cap B'E=E$, $\therefore$ $EF\perp$ 平面 $AB'E$. 同理, $EF\perp$ 平面 $DC'F$.

$\therefore$ 平面 $AB'E$ $/\!/$ 平面 $DC'F$.

2. 降维转化

由三维空间向二维空间转化, 是研究立体几何问题的重要数学方法之一. 降维转化的目的是把空间的基本元素转化到某一个平面中去, 用学生们比较熟悉的平面几何知识来解决问题. 如空间的线面垂直的判定定理的证明就是转化为证明平面的三角形全等的问题.

案例3 设正三棱锥 $S-ABC$ 的底边长为 a, 侧棱长为 $2a$, 过 A 作与侧棱 SB、SC 都相交的截面 AEF (如图4), 求这个截面周长的最小值.

分析: 这类问题通常都是将几何体的侧面展开成平面图形来解决.

沿侧棱 SA 将三棱锥剪开, 得侧面展开图(如图5),

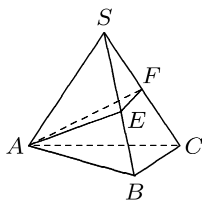


图 4

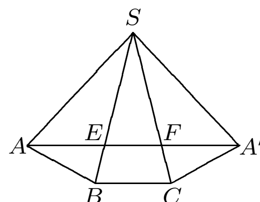


图 5

则求截面 $\triangle AEF$ 周长的最小值问题就转化为侧面展开图中求 A、A' 两点的最短连线段长的问题(解略).

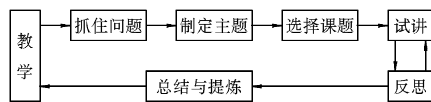
又如异面直线所成的角、线面角、面面角的计算, 最终可以转化为平面上两相交直线成的夹角来进行计算的.

实现空间问题向平面问题转化的方法很

以课例研究为载体的高中教研活动一例

200070 上海市闸北区教育局教研室 孟小龙

为了贯彻上海市二期课改精神, 闸北区教研室数学学科开展了一系列的以课例研究为载体的教研活动. 我们采用主题引导, 问题驱动的案例研究方式, 如图1所示:



以课例为载体的教研活动流程图

图 1

下面, 仅以一例来展现我们以课例研究为核心的教研活动过程.

一、选题——立足解决问题

在2002年下半年, 闸北区教研室组织了一次关于学生数学学习方式的调查, 分别对高中、初中的优等生、中等生与学困生进行了问卷调查, 获得有效学生问卷509份, 据此统计各项填答资料的百分比. 其中有一个情况引起了我们的关注. 在回答"你是否喜欢数学应用题"这一问题时, 统计结果表明: 学生的数学学习水平与学生对应用题的感兴趣程度呈明显正相关.

多, 常用的就有: 平移法、射影法、展开法和辅助面法等等.

3. 等积转化

"等积法"在初中平面几何中就已经有所应用, 是一种很实用的数学方法与技巧. 立体几何中的"等积转化"是以面积、体积作为媒介, 来沟通有关元素之间的联系. 如求线面距离, 就可以通过转化为点面距离、再转化为三棱锥的高, 最后利用等积法使问题得到解决.

案例4 如图6, 已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是棱长为a的正方体, E、F分别为棱AA_1、CC_1的中点, 求四棱锥A_1-EBFD_1的体积.

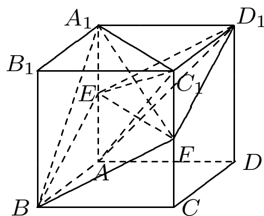


图 6

略解: 易证四边形$EBFD_1$是菱形, 连结A_1C_1、EC_1、AC_1、AD_1, 则

$$V_{A_1-EBFD_1}=2V_{A_1-EFD_1}=2V_{F-A_1ED_1}$$
$$=2V_{C_1-A_1ED_1}=2V_{E-A_1C_1D_1}$$
$$=V_{A-A_1C_1D_1}=\frac{1}{6}V_{\text{正方体}AC_1}=\frac{1}{6}a^3.$$

4. 数形转化

著名数学家华罗庚说过"数缺形时少直观, 形缺数时难入微." 因此在研究立体问题的过程中要注意把数和形结合起来考察, 把几何问题转化为代数问题, 以计算代替严密的逻辑推理证明. 新教材中增添空间向量内容, 正是这一思想方法的体现, 用空间向量解决立体问题, 用定量的计算代替了定性的分析, 为解决传统的纯立体问题提供了通法, 从而有效地避开了立体几何中繁琐的位置关系的判断, 并且思路清晰, 表达简洁,为解决空间距离及证明垂直和平行等问题开辟一条新途径. 这方面的文章较多, 本文不再赘述.

立体几何的教学, 关键是要调动学生的学习兴趣, 让他们学会联想与转化. 立体几何的许多定理、结论源自实际生活, 源自平面几何, 要教会学生联想实际模型, 联想平面中已经熟悉的知识, 借助可取之材来建立空间想象, 加强直观教学, 从而有效地培养他们的空间想象力, 提高他们解决立体几何问题的能力.

(如图2所示).

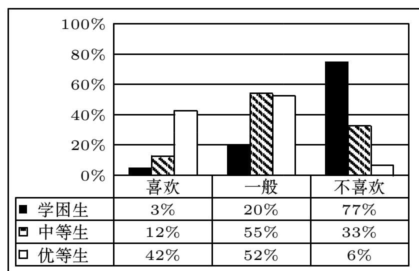


图 2

另外, 期末高三区统测结果也显示: 学生的数学学习水平与解决应用问题的水平呈明显正相关. 这一情况提示我们, 加强应用问题的教学可能有助于学生的学习. 于是我们围绕如何加强应用问题的教学展开了深入的教研活动.

首先, 我们面向全区高中数学教师征集应用性课题, 其中新中高级中学提供的"利用数学知识探究水土流失问题"被选中. 这个选题主题鲜明, 具有时代感和探究性, 所需数学知识适合高中学生的水平. 我们在新中高级中学组建了课题组, 成员包括区数学教研员、主讲教师和其他十一名三十五岁以下的青年教师.

二、在实践与反思中收获

为了说明课题组教师这次教研活动过程中教学观念转变的历程, 先概要介绍本节课主要内容.

基本背景材料:

数据一: 我国近4年(1999年-2002年)完成退耕还林数据

1999年	2000年	2001年	2002年
1000.9万亩	1141.1万亩	1300.5万亩	1482.4万亩

数据二:我国现有水土流失面积为179万平方千米, 全国15–25度的坡耕地面积为1.9亿亩(2002年9月数据).

数据三:《光明日报》报道:全国25度以上待还林的坡耕地面积为9100万亩(2000年4月数据).

基本教学环节

(1) 提出问题: 根据背景材料中的信息预测: 我国到哪一年能完成退耕任务?

数学模型: 函数拟合; 等比数列求和.

简解: 运用TI图形计算器的函数拟合功能, 得出结论: 我国从1999年开始的退耕还林数据按公比为1.14的等比数列计算可信度最高, 且可近似地认为2002年底有待退耕的坡耕地面积为 $(19000+9100)-(1141.1+1300.5+1482.4)=24176$ 万亩. 依题意

$$\frac{1482.4\times(1.14^n-1)}{1.14-1}\geqslant 24176,\quad n\geqslant 9.$$

结论: 我国到2010年底能完成退耕任务.

(2) 问题引申: 假设国家从2003年开始加大退耕的力度, 要求2008年底完成退耕任务, 那应该怎么办?

数学模型: 等比数列求和公式及估算.

简解: 设为在2008年底完成退耕任务, 从2003年开始使每年退耕面积的增长率提高到 x, 则 $\dfrac{1482.4[(1+x)^7-1]}{(1+x)-1}\geqslant 24176$,

得 $x\geqslant 0.276$.

结论: 只要把每年退耕面积的增长率提高到27.6%就可以了.

(3) 问题深入: 假定从1999年开始, 国家财政补助农民每亩500斤粮食, 每斤粮食按0.7元折算. 请大家来算一算: 到国家2008年底完成退耕任务时, 国家财政共需支付约多少亿元?

数学模型: 特殊数列求和.

简解: 设到2008年底完成退耕任务时, 国家财政共需为农民支付补贴 S 万元.

则 $S=500\times0.7\times1000.9\times(10+1.14\times9+1.14^2\times8+1.14^3\times7)+500\times0.7\times1482.4\times(1.276\times6+1.276^2\times5+1.276^3\times4+1.276^4\times3+1.276^5\times2+1.276^6)\approx 36756085$ (万元).

结论: 仅仅10年, 政府给予农民财政补助就需约3.7千亿.

(4) 问题延续:(课后作业) 假定某农民在政府鼓励下承包了一大片坡耕地, 经过几年的苦心经营, 现已建成了一初具规模的林场. 现在, 他想把林场稳定在一定规模的同时, 又通过木材的上市去获取尽可能多的经济效益, 大家不妨帮他出谋划策: 看看怎样的种植率和砍伐率能帮他实现这个目标.

数学模型: 等比数列求和公式及估算.

在教研过程中, 课题组的成员曾在许多问

题上产生过较大的争议:

1. 关于"课堂容量"

在第一次试讲中, 教师讲完了上述所有内容, 其中第(4)部分是以成题的形式给出的. 在课后的反思中, 课题组的成员一致认为内容太多, 需要删减, 但在删减哪些内容上产生了较大的分歧. 有些教师认为第(4)部分并不围绕主题"退耕", 且解题过程涉及的数列递推问题不是高考重点内容, 因此建议删掉, 但又担心删掉后, 会使课堂容量不足. 另一些教师建议简化问题背景的引入或简化实际背景向数学形式过渡的过程, 理由是这些过程对学生解题关系不太大. 显然, 多数教师关注的是"技能训练"的有效性和课堂容量的丰满程度. 怎样把握技能训练的强度和课堂容量的大小成为课题组讨论的焦点. 不少教师认为, 对于高中数学课来说, 要增加思维量, 必须增加题目的数量与难度, 因为数量可以增加思维密度, 难度可以增加思维深度. 但有些教师提出, 思维是数学教学的核心, 课堂容量的第一指标应该是思维容量, 而非讲授内容的多少. 思维是否具有主动性是衡量思维量大小的一个重要因素. 与主动探究相比, 让学生被动地多接受一些内容, 并不能保证学生具有较大的思维量. 有的教师还补充说, 如果教师所选的应用问题正好是学生熟悉的题型, 学生便可以模仿性地迅速解答, 这样的问题解决过程思维量是不大的. 最后老师们都同意课堂上删掉第(4)部分的内容, 并将多出来的近10分钟时间用于开发学生的思维容量.

2. 关于"重过程"

教师们为了引导学生亲身经历从提出问题到解决问题的全过程, 从多方面预计了学生可能会遇到的问题, 设计了解决这些问题的策略和多种解法. 可见, "数学教学要重过程"的观点得到了教师们的赞同. 但是, 在第二次试讲中, 学生们并没有按照教师预期的采用多种方法解决"我国哪一年能完成退耕还林的任务?"的问题, 几乎所有的学生都直接"发现"了退耕是按照等比数列的规律进行的! 这使得教师精心设计的引导学生进行探究学习的内容落空. 在课题组课后反思活动中, 有些教师怀疑"重过程"的可行性, 理由是学生已经习惯了解现成题目, "揭示过程"很难引起学生的兴趣. 而更多的教师坚持认为, 让学生经历过程是重要的, 问题是学生需要经历怎样的过程? 为什么这堂课上学生经历的过程这么简捷? 我们带着问题再次观看这堂课的实录, 分析原因, 最后找出了症结所在: 当呈现完背景材料后, 教师提问:"能否从材料中探究出数学问题, 并尝试用数学知识来解决". 表面上看, 这是一个引导学生主动提出问题, 主动探究问题的设问. 但由于前些天教师曾经讲过一道应用题, 是利用等比数列求和解决25°以上坡耕地退耕的问题. 因此在遇到背景很相似的问题时, 学生们非常习惯地进入了老套路.

这提示我们, 教师不恰当的铺垫会束缚学生的思维空间, 使他们跳过了从实际问题中提取并处理信息的过程, 直接进入了解成题的老套路上, 使得探究活动成为多余. 因此, 为了使学生真正经历探究的过程, 教师应该为学生的思维留有足够的空间, 让他们自己去架桥铺路, 形成他们自己创造的、富有个性的、或许有些缺陷的成果.

原因找到以后, 课题组的教师们一起为如何打破学生的思维定势出谋划策. 有人提议修改原始数据, 使四年的数据不完全符合等比数列, 这将使学生不得不采用多种方法去尝试解决, 寻找最佳解题方案; 有人提议把相关信息以工作单的形式提供给学生, 这可以为培养学生主动获取与处理信息创设条件. 还有人建议不但要强调问题从产生到解决的过程, 还要把问题延续下去, 这些建议在第三次试讲中均被采用, 收到了非常好的效果.

3. 关于"改变学习方式"

在第一次试讲后, 大家一致认识到了促进学生主动学习的重要性, 但讲课教师很沮丧, 他说在这一点上已经动了许多脑筋, 比如多设问, 多让学生讨论等, 但学生不太配合. 在这个问题上, 大多数教师认为不能抱怨学生, 应审视

数学作文:张扬学生的数学个性

610068 四川师范大学数学与软件科学学院 马岷兴

数学和语文一样, 也是一种语言, 一种表达科学的语言. 但是, 语文课有作文, 数学课却没有. 原因很多, 其中一个主要原因在于认为数学是冰冷的, 对任何人都一样的, 没有个性的. 笔者和四川省的一些老师, 觉得数学同样有“火热的思考”, 学生有自己的“数学情感”, 不同的学生具有不同的“数学个性”. 数学作文, 就是让学生张扬数学个性的教学方式.

数学作文是开展数学文化教育的一种教学途径. 它要求学生用写作方式表达他们的数学观念, 反映数学思考的过程和体验, 以及公布自己进行数学探究的结果与存在的问题. 通过数学作文, 能够展示学生的数学情感领域, 成为透视学生“数学现实”的一个平台. 反过来, 学生的数学作文成为检视数学教学质量的一面镜子, 能够引起教师对其教育观、数学观和学习观的反省与深思.

四川省的一些学校开展“数学作文”写作活动已经有好几年了, 数学作文拉近了教师和学生的心理距离, 激发了学习数学的动机和灵感, 促进了学习成绩的提高. 学生确实有写作“数学作文”的愿望, 他们有感愿发、有疑愿解、有奇愿探. 一位学生在其“数学作文”中深情地指出: “数学无时无刻不在无私地奉献给我们财富, 只是我们缺乏一双发现的眼睛.” 一份感受一份情、一种质疑一股劲、一篇作文一颗心. 下面摘选一些作文, 来看看学生那双真诚的眼睛, 也许可以感受到学生跳动着的数学脉搏.

一、倾听学生们的数学心声, 让他们说出来

数学学习在折磨中进步

(四川师大附中高中2003级2班 王元)

小学时有不少令我骄傲的事, 数学不错就是其中之一. 正因为有这种感觉, 自己上初中、高一时学数学不是很认真, 结果导致数学水平不断降低, 现在已到很“臭”的地步了. 有一段时间我对数学感到无望了, 有一件事令我发生了改变.

高二开学时新来了一位数学老师王老师. 他在课堂上曾说过:“你们自己先做例题, 经受折磨, 过后我再讲, 这样效果更好, 进步更大.” 我照王老师说的去做了, 每天晚上花很多时间

教师的设问是否真正具有探究性, 是否能激发学生讨论的积极性. 为此大家一起重新观看课堂实录, 对教师的每一个设问进行重新审视与分析.

在第二次试讲中, 大家感到教师讲得太多, 学生的思维活动不是很踊跃, 自主性不强. 教师没有及时地抓住课堂上学生出现的冲突进行设问, 而是迫不及待地纠正错误, 发表自己的观点, 丧失了许多引导学生主动探究与合作交流的机会. 例如, 当学生在解决“我国到哪一年能完成退耕任务?”时得出不同的结论, 教师马上指出错误的结论是由于对问题的初始值处理不当造成的, 错过了一个让学生自己检验、自己纠正错误的机会. 在改进后的教学中, 教师抓住这个时机提问:“这个问题我们不管从哪一年开始探究, 都应该得到同样的结果, 可现在我们得到了两种不同的结果, 大家来找一找是什么原因.”这大大地激发了同学们的好奇心, 使他们积极反思自己的解法, 并主动进行交流与合作.

在课题组成员的鼓励和帮助下, 改进后的课堂教学效果良好.

"折磨"自己,看着对面楼房中的灯一盏盏地熄灭,而我还要坚持奋斗,我真是"造孽"啊!数学就像渡河比赛,"顶尖高手"们用的是快艇,而我则是在自由泳.

在不断学习之后,知识丰富了,我所能采用的工具、方法也就逐渐增多了,从游泳变成了使用小船.再经过努力又变成机动船了.虽然现在做数学作业还很"造孽",但当我做出一道难题后真是很兴奋,这感觉就像中国男足小组出线,快40多岁的乔丹率领奇才队再创佳绩一样.我坚信自己在受了近二年的"折磨"后,终将架着快艇冲到胜利的彼岸.

二、学生需要建构自己的"数学意义",一篇真实思考的记录

关于"数学归纳法"的疑问

(作者 杨功荣 推荐教师 李兴贵)

"数学归纳法"也称"完全归纳法"(与通过少数特例直接猜测一般原理的"不完全归纳法"相对),作为有关自然数命题证明的一种常见方法,已成为数学上的经典证明法之一.

但是,"数学归纳法"这个名称却似乎不大合适."归纳":由一系列具体事实概括出一般原理(与演绎相对).由这个定义可以看出,"不完全归纳法"倒是很合适,"数学归纳法"显然有些文不对题.因为它所涉及到的自然数问题的例子是无限的,是不能通过穷举法一一验证的.归纳过程是一切实验科学的基础,可是它永远不容于严格的数学.不但用它来证明数学命题是不可靠的,甚于用它来确证某条真理也是不适合的.因为要证明一个数学问题,不论证实多少例子也是不够的.

数学是演绎科学,数学命题只要不会引出逻辑上的矛盾就是真的.由此也可看出"完全归纳法"并不含有系统、全面实验的意思.那么,"数学归纳法"的本质到底是什么?让我们来看一看其证明过程.第一步,$n=1$时命题成立,即是奠基步,第二步设$n=k$时成立得$n=k+1$时成立,这是递推步,反复如此,可穷举自然数的无限集.综上所述,尽管名称都是约定俗成的,我还是认为"数学归纳法"称为递推(归)法在逻辑上似乎更合理些.

三、这是学生自编、自演、自评的数学题.让他们展示一下自己的视角

金子论

(成都市树德中学 谢俊彦 推荐教师 李兴贵)

"闪光的不一定是金子;是金子一定会闪光."

这是一句不知某年某月某日某位高人所说的话.细细品味,还颇有点味道:

1.本格言适用于那些不被人重视,但极有能力者,将来会发光.

2.本格言"闪光的"是"金子"的必要不充分条件;"金子"是"闪光的"充分不必要条件.

前者几乎人尽皆知,后者恐怕连那位某年某月某位高人都没讲过吧.

其实,这是一个很简单的数学逻辑:

"闪光的不一定是金子",可用数学符号表示为:闪光$\nRightarrow$金子.

"是金子一定会闪光",同样可表示为:金子$\Rightarrow$闪光.

综上所述,就可以得到"闪光"是"金子"的必要不充分条件;"金子"是"闪光"的充分不必要条件.以上可引出以下两点值得注意和讨论的地方.

1.关于"$\Rightarrow$"

"$\Rightarrow$"表示推断,由"$\Rightarrow$"前的可以推断出"$\Rightarrow$"后的.关于这,我有道例题值得拿出来探讨.

例:判断命题"若$m>0$,则$x^2+x-m=0$有实数根"的逆否命题真假.

解:(逆否命题)若$x^2+x-m=0$无实数根,则$m\leqslant 0$.

初遇此题,我的想法是:当$m=0$时,原方程仍有实根,此命题为假,可这又与"原命题为真,其逆否命题也为真"相逆.当时我苦思不得其解,后来发现我犯了一个大错.

"若p则q为真,是指由p经过推理论证可得出q,也就是说:如果p成立,那么q一定成

(下转第10–3页)

化简代数式的常见错误的调查和分析

215400 江苏省太仓市实验中学 赵红琴

学生在代数表达式变形过程中碰到的困难和所犯的错误, 早在几十年以前就已引起了研究人员的兴趣. 为了更好地了解学生在化简代数式时常犯的错误, 笔者在2004年5月下旬到6月下旬对江苏省太仓市实验中学和太仓市第一中学、南郊中学三所学校中的共401名七年级和八年级的学生作了问卷调查(七年级226名和八年级175名). 并对其中20名学生进行了访谈. 七年级测试卷的题目如下:

(一)将下列式子写成最简的形式:

(1) $6x+3x$;　(2) $6x\cdot 3x$;

(3) $3x-6x$;　(4) $3x\cdot(-6)$;

(5) $6x:3$;　(6) $-3+6x$;

(7) $2x+3-3x$;　(8) $-x+2-x^2+1$;

(9) $(6x+3x)^2$;　(10) $2x^2-x-5x^2$;

(11) $(-4x+3)+(-1+2x)$;

(12) $(-4x+3)-(-1+2x)$;

(13) $-2(3x-8)$.

(二)当 $x=-5$ 时, 求第一题中代数式(7)和(8)的值.

八年级测试卷的题目如下:

(一)完成下列运算:

(1) $(-4x+3)-(-1+2x)$;

(2) $(-4x+3)(-1+2x)$;

(3) $2x(3x-8)$;　(4) $(3x-8):2$;

(5) $8x^2:2x$;　(6) $(8x-2x)^2$;

(7) $(8-2x)^2$;　(8) $(-8-2x)^2$;

(9) $(2x^2+5x)-3x$;

(10) $(12x^3-2x^2)-3x(2x+1)(2x-1)$;

(11) $(-x-3y)(3y-x)$;

(12) $x\sqrt{\dfrac{3}{x}}+\sqrt{9x}$;　(13) $x\sqrt{-\dfrac{1}{x}}$.

(二) (1)当 $x=-3$ 时, 求代数式(10)的值; (2)当 $x=\sqrt{2}+1$ 时, 求 x^2-2x-3 的值.

1. 常见错误

调查过程中发现由于受思维定势的束缚, 在解题时对题目中条件要求考虑不周全, 同时对公式法则理解不透, 缺乏知识的综合能力和应用能力, 造成知识间的干扰, 导致了各种各样错误的发生.

(I) 代数式与方程

错把代数式的恒等变形和方程的同解变形相混淆, 方程中含有等号, 方程才可以在等号两边同时乘以或除以一个数进行变形, 而代数式的恒等式变形的每一步计算值不改变. 在化简 $-3+6x$ 这题时, 被调查的对象中68.2%的学生知道不可以继续化简, 错误的学生中有18人的答案化为 $-1+2x$, 还解释是“约分”了, 有一位获江苏省竞赛一等奖的学生将其化为 $-\dfrac{1}{2}+x$, 还说这是同时缩小6倍. 有人给出的答案为 $1-2x$, 说是两因数同时除以 -3. 还有人将 $-6x+16=-\dfrac{6}{16}x=-\dfrac{3}{8}x$. 有的学生说看见求代数式“$-x+2-x^2+1$”的值时的第一反应是“怎么还出现一元二次方程?” 有的答案为 $\dfrac{x+x^2}{3}$, 理由是 $-x-x^2=-3$, 学生将代数式中的字母称为未知数, 好几个学生甚至直接来解方程, 如“$3x\cdot(-6)$, $3x=6$, $x=2$”, “$2x+3-3x$, $-x=-3$, $x=3$,” 有一位学生12题化简代数式中, 有7道全是做的解方程.

(II) 公式和法则

被调查的八年级学生中, 有近35%的同学不能正确使用公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 对于公式中的 a、b 指什么不明确, 碰到符号、系数也不能灵活使用. 如 $(-8-2x)^2=-(8+2x)^2=-(64+32x+4x^2)=-64-32x-4x^2$, $(8-2x)^2=2(4-x)^2=2(16-8x+x^2)=32-16x+$

$2x^2$. 对于 $(8x-2x)^2$ 有52%的同学先合并得 $(6x)^2=36x^2$, 另外的同学直接采用完全平方公式, 但采用公式的人中有60%的最后答案为 $64x^2+4x^2-32x=68x^2-32x$. 对于 $(-4x+3)(-1+2x)$ 有不少同学这样化简 $4x-8x-3+6x=2x-3$. 还有一个学生说:“将同类项相乘, 即 $-4x$ 乘 $2x$, 加上3乘 -1”. 对于 $(-4x+3)-(-1+2x)$, 一个学生说:“第一项 (-1) 变号, 另一项不变”. 有些学生错误地运用法则:“$2x^2-x-5x^2=4x-x-25x=-22x$, 因为这里必须先计算乘方.” 又如 $-x+2-x^2+1=3-2x$, 理由是 $-x$ 与 $-x^2$ 是同类项, 所以可以合并同类项. 尽管在课堂上, 教师经常向学生提及运算的基本性质. 但访谈时学生却很少提及. 一些学生提到的运算律常常是错误的, 如一个学生写出 $3x+6x=9x$ 后解释说这是“利用结合律”. 另一个学生写出 $(-8-2x)^2=8^2-(2x)^2$, $(6x+3x)^2=6x^2+3x^2=9x^2$, 并解释说“利用了分配律”. 对 $-3+6x$ 说将两个数 -3 和6加起来, 得 $3x$, 还说明是乘法结合律.

(Ⅲ) 代数式和因式分解

化简代数式即将代数式通过去括号、合并同类项将代数式化成最简单的形式. 而因式分解要求将多项式化为积的形式. 不少学生不明要求造成混乱, 如 $(-4x+3)-(-1+2x)=-6x+4=-2(3x-2)$, 又如 $(-x-3y)(3y-x)=x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$, $(-8-2x)^2=64+32x+4x^2=4(16+8x+x^2)$. 还将最后一步解释为去括号法则或者是提取公因式.

(Ⅳ) 代数式和代数式的值

在化简代数式时, 有的学生自己任意取一个具体的数代入计算, 把所得的代数式的值就当作是代数式化简的结果. 有一位平时数学成绩不错的学生在化简 $-3+6x$ 时, 说因为 x 可能等于0, 那么 $6\times 0=0$, 所以 $-3+0$ 就等于 -3, 所以 $-3+6x=-3$. 对于“$2x+3-3x$”, 一个学生说“把 x 当成1, 得 $3+(-1)=2$. 得 $2x+3-3x=2$.”

(Ⅴ) 改写和符号

学生很愿意进行改写代数式, 但是在调查中却发现学生在改写时会犯各种错误. 如 $6x:3=18x$, $6x:3=6x-3$, $3x\cdot(-6)=3x-6$, $(3x-8):2=3x:10$ 等等. 同时符号问题又是学生常常忽略的问题. 例如七年级测试卷最后一题当 $x=-5$ 时, 求 $-x+2-x^2+1$ 的值. 这道题的正确率只有58%, 错误大部分就是符号问题. 不少是这样写的 $-(-5)+2-(-5)^2+1=5+2+25+1=33$, 有的是一开始代入就发生错误: $-5+2-(-5)^2+1=-27$.

(Ⅵ) 计算

这类错误主要是指对于公式和法则、运算律等的运用、变形都是正确的或者求值时的代入、符号也是正确的, 但在应用四则运算的过程中出现的计算错误.

(Ⅶ) 其他

主要是没有化简到最简形式以及不会做. 如把 $(9x)^2$ 作为最后结果, 有部分同学对于有困难的题目不解, 还有干脆写上不会或无解.

2. 错误的变化

七年级共226份试卷. 每份15题(13题化简2题求值), 共3390个答案, 错误和没有做的人次743, 正确率为78%.

各类错误统计如下:

I	II	III	IV	V	VI	VII	总数
57	288	19	14	102	68	195	743

八年级共175份试卷. 每份15题(13题化简2题求值), 共2625个答案, 错误和没有做的人次369, 正确率为85%.

各类错误统计如下:

I	II	III	IV	V	VI	VII	总数
6	199	46	2	37	46	33	369

根据上面两个表格中各类错误的数据, 分别算出它们占总错误数的百分比可以得到两个年级各类错误的频率, 如图1.

八年级的正确率比七年级提高了一些. 两个年级第Ⅱ类错误的比例都非常高, 但是其中七年级主要偏向于法则的错误应用, 而八年级主要偏向于对公式的错误应用.

受因式分解的影响, 在八年级中第Ⅲ类错误明显增加, 因为涉及到二次根式的化简和计算, 第Ⅵ类计算错误没有下降. 但是第Ⅰ、Ⅳ、

V、Ⅶ类错误都有不同程度的减少. 八年级受方程变形影响的学生少了, 不化简到最简形式以及不做的也减少了.

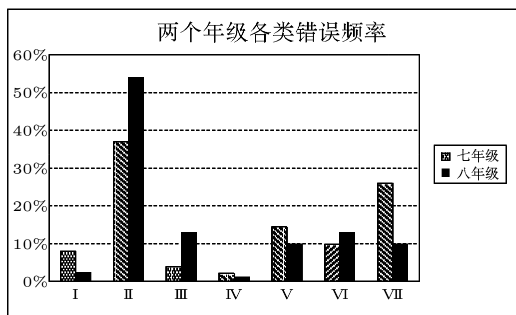


图 1

3. 对错误的分析

(1) 等号意义的不明确

在算术中等号表示要做一个运算过程, 并得到结果. 其意义是指从左到右的单向的运算. 但是代数中等号除了在一些场合中也有这种意义外, 更多的情况下是表达量的对称、平衡或传递关系, 是一种显示相等的关系结构, 应当同时理解为从左到右, 也可以从右到左. 学生对等号的理解停留在算术水平上, 那么理解与使用就会产生问题. 犯第Ⅰ类错误的学生, 将化简代数式做成解方程, 一方面我们理解为与解方程知识发生混淆, 另一方面, 因为在学生的想法中, 凡是要进行运算, 要求得到一个结果, 就一定要加上等号, "算出了x的值心里就踏实了." 一些学生在化简代数式时, 得到结果后, 又会接着写上等号, 随后写上一个数, 犯了第Ⅳ类错误. 因为他们总想将结果表示成"一个"数或式, 不能带运算符号. 当不知写什么时, 就随便将字母取一个常见的数, 代入计算后作为结果.

(2) 运算法则的错误运用

在化简代数式中最常见的错误当然是运算法则方面的错误, 也就是第Ⅱ类错误. 这种错误的背后就是对代数式句法的理解问题, 代数式将运算结构关系表示出来后, 同时也蕴含了一些未明确标出的约定的规则, 如运算的等级, 记号的省略等等. 如第Ⅴ类改写和符号的错误, $3x\cdot(-6)=3x-6$, $(3x-8):2=3x:10$ 等等. 如果学生对代数符号表达式的领会只是停留在概念上的话, 那么面对化简过程的基本法则或性质, 就会产生各种误解. 如 $-3+6x$ 说将两数 -3 和 6 加起来, 得 $3x$, 这类错误经常出现, 学生是将合理的代数运算法则过分地推广了. 实际上其中的深层原因, 是学生将字母作为具体对象的标记了, 他们先按算术法则去计算, 然后再添上字母. 又如对于 $6x+3x$: "做加法的时候, 将系数相加, 再写上 x." 一个孩子把这个法则用到乘法 $6x\cdot 3x$ 上来: "我必须先把系数相乘, 然后写上 x." 因而这是一种因思考停留在算术水平上而引起的问题.

(3) 思维定势带来负迁移

思维定势是心理活动的一种准备状态, 这种准备状态容易影响人对刺激情景以某种习惯性的方式进行反应. 这种准备状态干扰另一种知识技能的掌握, 对新问题的解决产生抑制作用. 即负迁移. 如第Ⅲ类错误就是体现了化简代数式受到因式分解的负迁移的影响, $(-x-3y)(3y-x)$ 得到 x^2-9y^2 后又会"做回去", 得到 $(x+3y)(x-3y)$. 根据统计结果, 八年级学生犯此类错误人次占总的错误人次的12.5%.

孩子知识的建构并非通过演绎推理来完成, 而是通过收集经验、比较结果、一般化以及修正前面的法则来完成. 学生有其自身的认知结构, 对每个新的内容, 他们会从自己的认知结构出发去理解, 这种理解有时是正确的, 有时却是错误的. 教师应该利用一切机会对代数法则进行解释, 努力提高他们的理解能力, 同时应该参考学生当前的作业、他们的疑问、观念和错误观念、自发推广的结论等等进行有针对性的教学. 老师如果没有在学生原有的知识水平、经验的基础上帮助学生进行建构, 学生的思维过程无法连续地进行, 新知识的联系不牢固, 表面上看是记忆的问题: "忘了", 其实学生还是没有真正理解教师所讲的内容.

在教学中, 应让学生理解知识的来源、背景, 使学生能够亲近数学, 同时帮助学生形成数感和符号感. 尽可能在实际的问题情境中帮助学生理解符号以及表达式、关系式的意义, 在解决实际问题中发展学生的符号感.

对六年级一节"探究活动"课的设计

201300 上海市南汇区教师进修学院 黄家礼

根据工作安排, 笔者在八一中学上了一节公开课, 内容是上海版二期课改新教材六年级《数学》第一册(试验本)第一章:探究活动(二)——将一个分数拆为几个不同的单位分数之和. 选择这个内容有两点考虑:1.这是新课程标准确定的专题研究内容, 笔者想作点探索; 2.探究活动的教学是一个新课题, 笔者也想作点尝试.

布鲁纳说, 一个学生不可能只凭发现法学习. 在教学中, 不可能每节课、每部分内容都采用探究法, 这没必要, 也不可能. 再则, 也不是每部分内容都适合探究法. 所以, 新课标指出, "接受学习与探究学习是互补的". 同时强调, "在基础教育阶段, 学生学习数学的方式以有意义的接受性学习为主". 因此选择什么内容进行探究学习是一个值得研究的问题. 张奠宙教授认为, 有三种知识不宜"探究":1.超经验的知识; 2.不可证明的知识; 3.程序性知识.[1] 有学者提出了选择探究性学习材料的四个视角: 1.选择有较强横向联系的材料; 2.选择纵向联系特征较强的材料; 3.选择能用以推广或拓广的问题材料; 4.选择开放性的数学问题.[2] 笔者认为, 单位分数这部分内容具有这些特征.

1.认识单位分数, 了解数学的历史、背景与文化

分子为1的分数叫单位分数, 也叫埃及分数.

记录埃及分数成果的《莱因德纸草书》(Rhind Papyrus)是公元前1650年左右的埃及数学著作. 作者是阿姆士(A'hmose). 最早发现于埃及底比斯废墟中, 1858年由英国人莱因德(H·Rhind)发现, 故得名. 此书现保存在英国的伦敦博物馆. 类似的还有一本纸草书保存在莫斯科的普希金博物馆. 据书中记载, 此书中关于单位分数的许多结论在公元前2700年左右的古埃及人就已知道.[3]、[4]

《莱因德纸草书》中记载的有关单位分数的等式, 用今天的符号表示有:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104};$$
$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114};$$
$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531};$$
$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365};$$
$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606};$$
$$\cdots$$

在《莱因德纸草书》中, 给出了形如 $\frac{2}{k}$ (k为从5到101的奇数)的分数分解为单位分数之和的表达式. 在4000多年前, 应该说还谈不上数学研究, 数学都是应实际需要而产生, 在实际应用中得到发展的. 古埃及人为什么要把这些分数拆为一些不同的单位分数之和呢? 他们又是采用什么方法把一个分数拆为不同的分数之和的呢?这都是一个谜. 尽管埃及分数像埃及的金字塔一样, 还有许多未解之谜, 但我们从中可以触摸到古埃及人的智慧, 感受到它的神秘与美丽!

北大的张顺燕教授说, 我们应"在文化这一更广阔的背景下讨论数学的发展、数学的作用以及数学的价值, 从历史的文化的和哲学的高度鸟瞰数学的全貌和美丽."[5] "一门科学的历史是那门科学中最宝贵的一部分, 因为科学只能给我们知识, 而历史却能给我们智慧"(傅鹰).

2.寻求单位分数展式, 体验探究的过程与方法

教材没有给出把一个分数化为不同的单位分数之和的一般方法. 为此笔者设计了如下的探究过程:

我们知道 $\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$,

将上面的算式反过来, 就是:

$\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}$,

怎样把一个分数拆为几个(两个以上)不同的单位分数之和呢?

先看最简单的情况(这是华罗庚教授倡导的方法), 把 $\frac{1}{2}$ 化为两个不同的单位分数之和应有如下的过程:

$\frac{1}{2}=\frac{x+y}{2(x+y)}=\frac{x}{2(x+y)}+\frac{y}{2(x+y)}=\frac{1}{?}+\frac{1}{?}$, 其中 x、y 为待定的正整数. 也从最简单的情况开始.

当 $x=1$, $y=1$ 时, 有 $\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2(1+1)}=\frac{1}{2(1+1)}+\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. 为两相同的单位分数之和, 不合题意.

当 $x=1$, $y=2$ 时, 有 $\frac{1}{2}=\frac{1+2}{2(1+2)}=\frac{1}{2(1+2)}+\frac{2}{2(1+2)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, 符合题意.

当 $x=1$, $y=3$ 时, 有 $\frac{1}{2}=\frac{1+3}{2(1+3)}=\frac{1}{2(1+3)}+\frac{3}{2(1+3)}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$, 不合题意.

上述过程通过课件的变化来演示, 直观、简捷、明确, 更可激发学生的探究欲望.

$1+2$ 可以, $1+1$, $1+3$ 不可以, 说明 x、y 是有条件的, x、y 要满足什么条件呢?

学生探索得出: (1) x、y 不能相等; (2) x、y 必须都是分母2的因数.

同理, 有:

$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{3(1+3)}=\cdots=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4}=\frac{1+4}{4(1+4)}=\cdots=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$;

$\cdots$

更一般地有(学生自己探究得出)

$\frac{1}{n}=\frac{1+n}{n(1+n)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}$.

即 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}$ ················ $(*)$

有了公式 $(*)$, 我们可以完满地解决前面提出的问题, 即: 把一个分数拆为几个(两个以上)不同的单位分数之和.

(1) 当分子为1时, 即单位分数, 直接由公式得出 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}$.

(2) 当分子为2时, 有 $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{1+n}$.

(3) 当分子大于等于3时, 把分子分解为分母的因数之和, 通过有限次的利用公式 $(*)$, 总可以把一个分数化为不同的单位分数之和.

例 $\frac{7}{9}=\frac{1+3+3}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$.

问题解决得很彻底, 很漂亮. 上述过程, 从学生已有的知识出发, 从最简单的情况入手, 经过引导、尝试、探究, 得出公式 $(*)$, 让学生经历知识的发生过程, 接着又利用公式 $(*)$ 把一个分数拆为几个不同的单位分数之和, 让学生体验知识的应用过程, 培养了学生应用知识的能力.

3. 发散引申, 多向提出新问题

问题是数学的心脏. 提出问题比解决问题更重要. 杨振宁说过: 学问学问, 就是学会提出问题. 培养学生提出问题的能力是探究性学习的重要目标之一. 由于这部分内容具有纵横联系、交错的特点, 由此创设的问题情境也具有多向、多维的特征. 它能为学生提供较多的"问题材料". 无论在探究之前、探究之中, 还是探究之后.

这节课上, 笔者通过引导学生观察等式:

$\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}$.

提出了10个问题:

(1) 等式右边的两个分母可以同是奇数吗?

(2) 等式右边的两个分母可以是相邻的两个整数吗?

(3) 等式右边的两个分母可以是相邻的两个奇数吗?

(4) 等式右边的两个分母可以是相邻的两个偶数吗?

(5) $\frac{1}{6}$ 拆为两个不同的单位分数之和, 一共有多少种拆法?

(6) 等式右边的两个分母可以是相邻的两个平方数吗?

(7) 等式右边的两个分母可以是相邻的两个立方数吗?

(8) $\frac{1}{6}$ 可以拆为3个、4个、5个、······ 单位分数之和吗?

(9) $\frac{1}{6}$ 可以拆为两个单位分数之和, 其表达式不是惟一的, 那么拆为3个、4个、5个、··· 单位分数之和, 其表达式都不惟一吗?

(10) $\frac{1}{6}$ 拆为3个单位分数之和时, 3个分母可以是3个连续的整数吗? 可以是3个连续的奇数吗? 可以是3个连续的平方数吗?

······

学生说, 还可以提出很多 (学生思路已打开).

一个新问题, 可能就是一个新知识的增长点; 可能就是一扇窗, 为你打开一片新天地. 上述问题, 当然不一定都有研究价值, 但是, 引导学生从多角度提出问题, 对培养学生提出问题的能力, 对培养学生的数学素养, 是有价值的.

4. 纵横拓展, 寻找感兴趣的新课题

前面所提的问题可以作为一个课题来研究, 将课内延伸到课外. 但这部分内容还有更广阔的联系.

(1) 横向讲, 与古老的"分牛"问题有联系; 与镶地板问题有联系; 与幻方有联系; 与不定方程有联系; 与级数求和有联系. 限于篇幅, 有兴趣的读者可参看[6].

(2) 纵向讲, 将一个分数拆为几个不同的单位分数之和, 如果将展开的项数、分母的大小作不同的限制, 可以得出许多不同层次的有趣的问题.

如 $\frac{5}{121}$ 不可能拆为两个单位分数之和. 但 $\frac{5}{121}=\frac{1}{25}+\frac{1}{759}+\frac{1}{208725}$, 有没有分母小于208725的三个不同单位分数之和的表达式呢? 这是一个还没解决的问题!

又如: 对于 $n>1$ 的整数, 能否将 $\frac{4}{n}$ 拆为三个不同的单位分数之和呢? 当 $1<n<10^7$ 时, 人们已证明是可以的; 而当 $n>10^7$ 时, 也是一个没解决的问题!

1也可以拆为几个不同的单位分数之和. 如: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, 能将1拆为几个分母为不同奇数的单位分数之和吗?

1976年, 有数学家解决了这个问题, 他还发现项数最少得有9项, 即1可拆为9个不同的分母都是奇数的单位分数之和, 一共有5个结论, 它们是:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}.$$

有人曾把"费马定理"比作下金蛋的"母鸡", 是说在研究"费马定理"的过程中, 提出并解决了一个又一个有价值的新问题. 从前面的讨论我们看出, 单位分数也是一个下蛋的"母鸡".

参考文献

[1] 张奠宙. 报告:数学教育的明天.

[2] 高向斌. 中学数学探究课选材的四个视角. 数学教育学报. 2004.3.

[3] 李文林. 数学史教程. 高等教育出版社

(下转第10–49页)

轨迹方程的反思教学案例

211102 南京师大附中江宁分校 朱永厂

新课程的理念要求: 数学教学要体现"数学探究", 而"数学探究"要力求培养学生善于反思的良好习惯. 本文以如下案例来探求反思教学的途径和作用.

问题: 如图1, 线段AB的两个端点A、B分别在x轴、y轴上滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程 (《高中数学》第二册(上) P.97(7)).

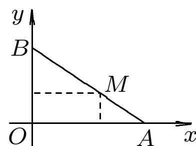


图 1

在探究中, 大多数学生给出了如下解法:

设$M(x,y)$、$A(a,0)$、$B(0,b)$, 则点M分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比$\lambda=\dfrac{2}{3}$, 由定比分点公式得 $\begin{cases} x=\dfrac{a}{1+\frac{2}{3}}, \\ y=\dfrac{\frac{2}{3}\cdot b}{1+\frac{2}{3}}, \end{cases}$ 再由$a^2+b^2=25$, 化简得点M的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

对同一个问题, 从多方位、多角度地进行分析、理解和反思, 充分提取已有知识信息, 合理挖掘题目的隐含条件, 就可以找出不同的解题途径. 于是, 我就和同学们分组进行探索、研究, 最终得到如下的几种解题思路:

思路1 (向量法): 由点$M(x,y)$、$A(a,0)$、$B(0,b)$, 很容易得到向量$\overrightarrow{OA}=(a,0)$, $\overrightarrow{AB}=(-a,b)$, $\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{2}{5}a,\dfrac{2}{5}b\right)$, 再由向量加法的三角形法则可得$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}$, 即$(x,y)=\left(\dfrac{3}{5}a,\dfrac{2}{5}b\right)$, 再代入$a^2+b^2=25$, 化简得点$M$的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

思路2 (参数法1): 若设直线AB的倾斜角为α, 点$M(x,y)$、$A(a,0)$, 可得参数方程

$\begin{cases} x=a-2\cos(\pi-\alpha), \\ y=2\sin\alpha, \\ a=5\cos(\pi-\alpha), \end{cases}$ 消去a得 $\begin{cases} x=-3\cos\alpha, \\ y=2\sin\alpha, \end{cases}$

消去参数α可得所求轨迹方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

思路3 (复数法): 复数与向量一样也具有形的特征, 在某些方面它又优于向量, 比如它们的乘积又有旋转的直观意义, 故可将向量$\overrightarrow{MA}$表示的复数$\dfrac{2}{5}a-\dfrac{2}{5}b\mathrm{i}$逆时针旋转$180^\circ$再伸长为原来的$\dfrac{3}{2}$倍, 即乘以复数 $\dfrac{3}{2}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$可得向量$\overrightarrow{MB}$表示的复数, 再利用复数相等即可求得所求轨迹为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

思路4 (参数法2): 考虑到直线的参数方程, 可设点$M(x_0,y_0)$, 直线AB的倾斜角为α, 则直线AB的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha, \end{cases}$ (t为参数), 将其代入$xy=0$得

$(\sin\alpha\cos\alpha)t^2+(y_0\cos\alpha+x_0\sin\alpha)t+x_0y_0=0$, 其两根$t_1$、$t_2$对应$MA$、$MB$, 则$t_1+t_2=1$, 即

$$-\frac{y_0\cos\alpha+x_0\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1. \tag{1}$$

又$t_1t_2=\dfrac{x_0y_0}{\sin\alpha\cos\alpha}$, 而$|AB|^2=25\Longrightarrow$

$$(t_1-t_2)^2=25\Longrightarrow\frac{-4x_0y_0}{\sin\alpha\cos\alpha}=24. \tag{2}$$

由(1)、(2)消去参数α可得所求轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

解完这道题之后, 我们并没有结束, 而是反思限制该问题的各个条件是否可以加强, 能否特殊化或一般化, 舍弃问题的非本质特征, 筛选出本质特征. 最终各小组长总结得到以下6个变式问题.

变式1: 线段AB的两个端点A、B分别在直线$y=x$和$y=-x$滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点,且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程.

变式2: 线段AB的两个端点A、B分别在圆$x^2+y^2=64$滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程.

变式3: 线段AB的两个端点A、B分别在椭圆$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$上滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程.

变式4: 线段AB的两个端点A、B分别在双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$的一支上滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程.

变式5: 线段AB的两个端点A、B分别在抛物线$y^2=6x$上滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且$|AM|=2$, 点M随线段AB的运动而变化, 求点M的轨迹方程.

考虑到点M满足$\frac{AM}{BM}=\frac{2}{3}$的特殊性, 可使其更为一般化为$\frac{AM}{BM}=\frac{m}{n}$, 从而可得:

变式6: 线段AB的两个端点A、B分别在x轴、y轴上滑动, $|AB|=5$. 点M是AB上一点, 且满足$\frac{AM}{BM}=\frac{m}{n}$, 点$M$随线段$AB$的运动而变化, 求点$M$的轨迹方程.

通过对以上问题的变式, 使我们从会解一道题过渡到会解一类题, 起到一把钥匙开多把锁的良好效果.

如果到此, 我们放弃继续研究的话, 不免有些遗憾, 此时可以将题目条件、结论和内在的联系适当的变化、引申和推广, 使其内在的、隐含的、本质的特征得以延拓, 经过大家积极主动的探求和热烈讨论, 最终得到以下5个探究问题:

探究1: 线段AB的两个端点A、B分别在x轴、y轴上滑动, $|AB|=5$. 以AB为边作等边三角形ABM(其中A、M、B按顺时针排列), 求顶点M及其中心的轨迹.

探究2: 线段AB的两个端点A、B分别在x轴、y轴上滑动, $|AB|=5$. 以AB为边作正方形$ABCD$(其中A、B、C、D按顺时针排列), 求顶点C及其中心的轨迹.

再换个角度, 将点A固定, 将定长线段AB改变, 再让点B绕不同的曲线运动又可延拓出以下问题:

探究3: 已知定点$A(0,0)$, 点B在直线$x-3=0$上滑动, 在射线AB上取一点M, 使$|AB|\cdot|AM|=8$, 求点M的轨迹方程.

探究4: 已知定点$A(0,0)$, 点B在直线$x-y+1=0$上滑动, 以AB为边作正$\triangle ABM$(其中A、B、M按顺时针排列), 求点M的轨迹方程.

探究5: 已知定点$A(3,1)$, 点B在椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上滑动, 连结$AB$, 并把$AB$绕点$A$顺时针方向旋转$90°$得$AQ$, 再把$AQ$延长到$M$, 使$AM=2AQ$, 求点$M$的轨迹方程.

通过对以上问题延拓和反思, 使我们的思路得到拓展, 能力得到提高, 视野得到开阔.

反思可以提高沟通新旧知识的联系, 促进知识的同化和迁移; 可以拓宽思路, 优化解法, 完善思维过程. 反思对学生来说表现为一种积极的探索活动和富有个性化的创新精神, 它具有挑战性, 是一种自我超越、自我完善, 它可以提高问题意识, 优化思维品质, 是使学生走出"题海"的有效途径. 反思对于教师来说, 它能把教师从死教书与教死书中解放出来, 使我们从一个只会上课的教书匠变成一个会研究的科研型教师. 反思是高效的学习方法, 最佳的纠错手段. 它对优化师生的数学认知结构, 培养思维的灵活性和深刻性, 批判性和发散性, 适应性和创新性有着不可低估的作用.

一堂解析几何轨迹题的探究课

200023 上海市卢湾高级中学 赵秀琴 邵春和

上海市高二第一学期数学(试验本)第128页复习题第五题:

有一张长为8, 宽为4的矩形纸片$ABCD$, 按图1所示方法进行折叠, 使每次折叠后点B都在AD边上, 此时将B记为B'(注: 图中的EF为折痕, 点F也可落在CD边上), 过B'作$B'T/\!/CD$, 交EF于点T, 求点T的轨迹方程.

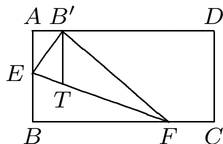


图 1

课前要求学生: 先自主探索、独立求解. 课上要求学生进行交流、讨论.

一、学生探究的思维路径

S_1: 建立如图2所示的直角坐标系, 则$A(0,4)$、$C(8,0)$、$D(8,4)$. 设$T(x,y)$, 则$B'(x,4)$. 先求出$B'B$的中点$P\left(\dfrac{x}{2},2\right)$,

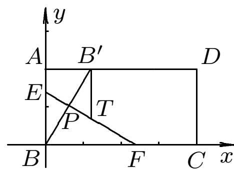


图 2

$\because$ $TP\perp B'B$,

$\therefore$ $k_{TP}\cdot k_{B'B}=-1$,

$\therefore$ $\dfrac{y-2}{x-\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{4-0}{x-0}=-1$,

$\therefore$ T点的轨迹方程是 $y=-\dfrac{x^2}{8}+2$.

S_2: 如图3, 设$E(0,b)$、$T(x,y)$、$B'(x,4)$,

$\because$ $|B'E|=|EB|$,

$\therefore$ $(x-0)^2+(4-b)^2=b^2$,

$\therefore$ $b=\dfrac{x^2}{8}+2$ ························ ①

又$k_{TE}\cdot k_{B'B}=-1$,

$\therefore$ $\dfrac{y-b}{x-0}\cdot\dfrac{4-0}{x-0}=-1$ ························ ②

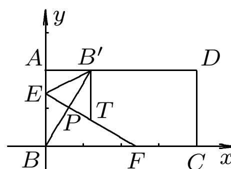


图 3

由 ①、② 得T点的轨迹方程是 $y=-\dfrac{x^2}{8}+2$.

S_3: 如图3, $\because$ $|BT|=|B'T|$,

$\therefore$ $(x-0)^2+(y-0)^2=(4-y)^2$,

$\therefore$ T点的轨迹方程是$y=-\dfrac{x^2}{8}+2$.

T: 同学们的知识储备与视角不同, 因而出现不同的思维路径, 请加以总结:

S_1: 用了$B'B$的中点, 以及$TP\perp B'B$;

S_2: 用了$|B'E|=|EB|$, 以及$TE\perp B'B$;

S_3: 用了$|B'T|=|BT|$.

T: 回头总结, 在利用轴对称的性质时, 你选择哪一种方法更好? 另外还有哪一些情况值得深入探讨?

二、轨迹方程中的x、y的取值范围

T: 题目中点F也可落在CD上, 是否要另外讨论T点的轨迹方程? 如图4所示.

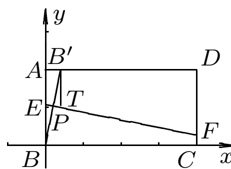


图 4

S:用上面三种方法, 仍能得出T的轨迹方程不变, 即$y=-\frac{x^2}{8}+2$.

T:当点F由原来在BC上变到了在CD上, 轨迹方程中的x或y的范围会发生哪些改变.

S_4:由图1～4, 我们可以得到方程$y=-\frac{x^2}{8}+2$, $y>0$的取得范围是$0\leqslant x\leqslant 4$.

S_5:当点F与点C重合时, 可计算得$x=8-4\sqrt{3}$, 所以当F在BC上时, 点T的轨迹方程为$y=-\frac{x^2}{8}+2$ $(8-4\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 4)$;

当F在DC上时, 点T的轨迹方程为$y=-\frac{x^2}{8}+2$ $(0\leqslant x\leqslant 8-4\sqrt{3})$.

三、开拓与发展

T:反思以上讨论, 能否总结一下, 画示意图时, 先画对称轴, 再画对称点; 还是先画对称点, 再画对称轴, 哪种画法更为方便?

S:显然对画图来说, 后者顺序较好.

T:能否进一步讨论, 把矩形变换为平行四边形?

问题　若平行四边形$ABCD$的边长为8, 高为4, $\angle ABC=\theta$, θ在变化, 点T的轨迹方程会发生怎样的变化?

分析: (1) 当θ是锐角时, 比如设$A(2,4)$, $D(10,4)$, 如图5所示, 由$|B'T|=|BT|$可得点T的轨迹 $g(x)=y=-\frac{x^2}{8}+2$ $(2\leqslant x\leqslant 10)$, 则 $y\in\left[2-\frac{100}{8},2-\frac{1}{2}\right]$,即$y\in\left[-\frac{21}{2},\frac{3}{2}\right]$.

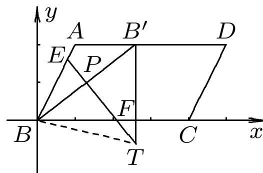


图 5

(2) 当θ是钝角时, 如图6所示, 不妨设$A(-3,4)$, $D(5,4)$, 由$|B'E|=|EB|$可得点T的轨迹 $g(x)=y=-\frac{x^2}{8}+2\,(-3\leqslant x\leqslant 5)$, 则$y\in\left[2-\frac{25}{8},2\right]$, 即$y\in\left[-\frac{9}{8},2\right]$.

T:当矩形变换为平行四边形时, T点轨迹方程仍为$y=-\frac{x^2}{8}+2$, 只是x的取值范围发生变化.

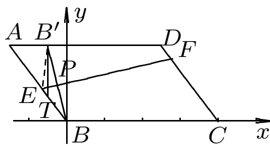


图 6

我们来作进一步思考和拓宽: 如果将该平行四边形旋转后成如图7的情形: 平行四边形$ABCD$, AB长为4, 边AB、CD的距离为8, 则点T的轨迹方程又如何变化呢?

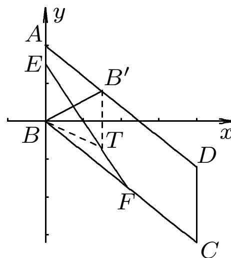


图 7

先定对称点B', 再定对称轴EF, 设$T(x,y)$, $D(8,t)$, 则$C(8,t-4)$, 又$A(0,4)$.

∵ AD的斜率$k=\frac{t-4}{8}$, AD的方程为$y=kx+4\,(k\neq 0)$,

则$y_{B'}=kx_{B'}+4$且$x_{B'}=x$,

由$|B'T|=|BT|$可得$(y-y_{B'})^2=x^2+y^2$, 即$[y-(kx+4)]^2=x^2+y^2$,

∴ $y=\frac{(k^2-1)x^2+8kx+16}{2(kx+4)}$, $x\in[0,8]$,

当$k=\pm1$时, $y=\frac{\pm 8x+16}{2(\pm x+4)}$, 为双曲线型$f(t)=a+\frac{b}{t}$;

当$k\neq\pm1$时, $y=\frac{(k^2-1)x^2+8kx+16}{2(kx+4)}$, 为$f(t)=at+\frac{b}{t}$型;

而当$x=-\frac{4}{k}$时, $B'T/\!/EF$, T点的轨迹不存在, 如图8所示.

T:至此, 我们有这样的经验, 图4～6中, 点T的轨迹都是抛物线型, 只是x的取值范围不同. 而图7中, 点T的轨迹则与AD的斜率有

“循环语句”主要教学环节设计

277600 山东省微山一中 李 群 孙庆红

1. 两种循环结构

师: 请同学们看下面的例子: 计算 $1+2+\cdots+1000$ 的值, 程序框图如下:

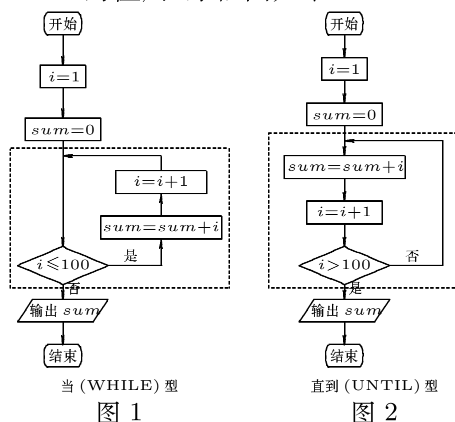


图 1　　图 2

师: 上图中虚线所画部分就是今天要研究的两种循环结构, 请同学们观察两种结构有哪些区别?

生 1: WHILE 型先判断条件, 再执行循环体;

UNTIL 型先执行一次循环体, 再判断条件.

师: 很好, 这是最重要的区别, 因此WHILE型也叫前测试型; UNTIL 型也叫后测试型.

师: 还有什么区别吗?

生 2: WHILE 型满足条件时, 执行循环体, UNTIL 型不满足条件时执行循环体.

师: 观察很仔细, 还有区别吗?

生 3: 条件相反, 例 $i\leqslant 100$, 与 $i>100$.

师: 好, 对于同一种算法来说, 条件互为反条件.

师: 这三个同学的回答综合一下就是两种结构的主要区别.

师: (比喻) 当型: 先问你是否饿, 若饿则吃馒头,如此反复. 直到型: 先给你吃个馒头, 再问你是否饱了, 若不饱则再吃馒头, 如此反复.

2. 两种循环语句

WHILE 型:

```
WHILE 条件
循环体
WEND
```

UNTIL 型:

```
DO
循环体
LOOP UNTIL 条件
```

师: 对于上例, 同学们尝试一下用程序语言表示其算法 (两生分别用 WHILE 型和 UNTIL

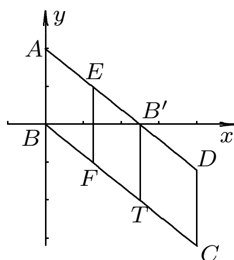


图 8

关.

综上所述, 此题是“轴对称”在解析几何中的一个应用, 体现了平面几何与解析几何的有机结合. “轴对称”既是基础知识, 也是一种数学思想方法. 教材中这种“轴对称”思想时时有所体现, 例如圆、椭圆、双曲线、抛物线本身就是轴对称图形.

参考文献

[1] 上海市高中二年级第一学期数学 (试验本). 2003年8月版.

[2] 张奠宙. 《关于教师的一桶水》. 数学教学. 2005. 3.

型板演, 师引导学生先写关键词, 然后填入"循环体"和"条件").

生4: $i=1$

```
i = 1
sum = 0
WHILE i <= 100
sum = sum + i
i = i + 1
WEND
PRINT sum
END
```

生5:

```
i = 1
sum = 0
DO
sum = sum + i
i = i + 1
LOOP UNTIL i > 100
PRINT sum
END
```

师: 若改为$1+3+5+\cdots+99$, 上述程序语言应作如何改动呢?

生6: WHILE型: 条件改为$i\leqslant 99$, 循环体$i=i+1$改为$i=i+2$.

生7: UNTIL型:$i>100$改为$i>99$; $i=i+1$改为$i=i+2$.

师: 很好, 若条件$i\leqslant 100$与$i>100$不作改动, 运行结果会如何呢?

(生讨论运行过程)

生8: 结果仍然正确.

师: 为什么?

生8: 当执行完$i=99$后, 同样要执行一次循环体便得$i=101$, 再判断也一样可跳出循环.

师: 太棒了.

师: 引例改为"$1\times 2\times 3\times\cdots\times 100$", 那么程序语言又应作如何改动呢?

生9: 从"$1+2+\cdots+100$"到"$1\times 2\times\cdots\times 100$", 只是"+"变为"×", 所以我认为只要把"$sum=sum+i$"改为"$sum=sum*i$"即可.

生10: 还有"$sum=0$"改为"$sum=1$", 否则结果为0.

师: 很好.

变式改为$n!\,(1\times 2\times\cdots\times n)$如何编程 (两生分别以WHILE型、UNTIL型在黑板上板演过程)?

生11:

```
i = 1
sum = 1
WHILE i <= n
sum = sum * i
i = i + 1
WEND
PRINT sum
END
```

生12:

```
i = 1
sum = 1
DO
sum = sum * i
i = i + 1
LOOP UNTIL i > n
PRINT sum
END
```

师: 他们的写法有什么遗漏吗 (生讨论)?

生13: 因为n是变量, 所以利用它进行判断前应赋有初值, 加上"INPUT n".

师: 很好, 这两个同学给我们提了个醒, 相信同学们以后不会再犯类似错误.

师: 同学们观察课本上"判断大于1的自然数n是否为质数"的程序语言, 其程序见课本P.22其运行结果如何?

师切换到QBASIC环境, 由学生随便说数进行验证, 结果程序错误.

师: 同学们思考原因.

生14: 根据条件语句的运行方式, 要么执行语句1, 要么执行语句2, 所以该程序错误, 不会得出结果.

生15: 该程序只能执行最外层的条件语句中的语句1或语句2, 只能判断出2是质数, 若$n>2$, 则不会输出结果.

师: 同学们太棒了, 由此我们可以看出课本上的知识有时也会出现疏忽, 所以同学们要在

学习中敢于质疑, 质疑才能创新, 创新是我们进步的不竭动力.

师: 那么如何改正呢(生讨论)?

生16:
```
INPUT n
flag=1
IF n>2 THEN
d=2
WHILE d<=n-1 AND flag=1
IF n MOD d=0 THEN
flag=0
ELSE
d=d+1
END IF
WEND
END IF
IF flag=1 THEN
PRINT n; "是质数"
ELSE
PRINT n; "不是质数"
END IF
END
```

生17:
```
INPUT n
flag=1
IF n>2 THEN
d=2
WHILE d<=n-1 AND flag=1
IF n MOD d=0 THEN
flag=0
ELSE
d=d+1
END IF
WEND
IF flag=1 THEN
PRINT n;"是质数"
ELSE
PRINT n;"不是质数"
END IF
ELSE
PRINT n;"是质数"
END IF
END
```

师: 很好, 这个程序还可以有其他的改法, 同学们课下再思考, 可在QBASIC环境下验证.

师: 现在计算机的运行速度已经非常快, 但是判断一个算法的优劣, 依然是看计算的次数, 上述算法是从2验证到$n-1$是否为n的约数; 能否使验证数减少呢 (生讨论)?

生18: 只要验证从2到$\frac{n}{2}$即可, 因为$\frac{n}{2}+1$到$n-1$一定不是n的约数.

师: 好, 还能不能验证得更少一些呢?

生19: 只需验证从2到$\sqrt{n}$即可, 因为若$n=a\times b$, 除了1和n之外, $b\geqslant\sqrt{n}$, 那么必有$a\leqslant\sqrt{n}$, 所以只要验证到$\sqrt{n}$即可.

(上接第10–39页)

$\overrightarrow{c}=(1,0)$, $\alpha\in(0,\pi)$, $\beta\in(\pi,2\pi)$, 设向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{c}$的夹角为θ_1, 向量$\overrightarrow{b}$与$\overrightarrow{c}$的夹角为θ_2, 且$\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{3}$, 求$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$的值.

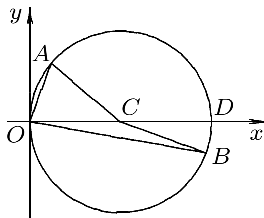


图 4

分析: 如图4, 设$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}$($O$为原点), 则$A$、$B$都在以$C(1,0)$为圆心, 以1为半径的圆上, 根据圆的参数方程的意义可知: 向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{c}$的夹角 $\theta_1=\angle AOD=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{\alpha}{2}$. 同理, 向量$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的夹角$\theta_2=\frac{\beta-\pi}{2}$. 从而可得 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{1}{2}$.

通过这些问题的分析与讨论, 我们可以发现, 在解决向量问题时, 我们不但要能充分运用向量有关知识, 采用通法解决(上述问题都可采用通法解决), 而且也要能合理综合其他背景(如圆)巧妙解决向量问题.

一元二次方程的六种几何解法

200062　华东师范大学数学系2003级教育硕士　范宏业

在整个中学数学学习中, 似乎很少介绍用其他的方法如几何的方法来解答一元二次方程, 充其量只不过是用几何图形来说明一下一元二次方程根的意义, 而这还是在学习几何内容时使用了一元二次方程后才有的说明. 本文根据有关的文献资料, 对历史上有名的一元二次方程的几何解法进行了整理, 从中我们可以看出一元二次方程与曲线和几何图形的联系是那样的紧密, 在我们使用代数方法为几何问题解决做出定量分析的同时, 我们也可以使用几何的方法来求一元二次方程的精确解; 这样有助于沟通两知识之间的联系, 还数学知识整体的面貌, 也有助于学生思维灵活性的形成. 从中我们还可以看到一元二次方程解法的发展演变.

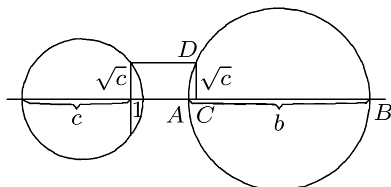
一、欧几里得的方法

一元二次方程的几何解法可以追溯到古希腊. 欧几里得《几何原本》卷二命题11给出了等价于求一元二次方程正实根的方法, 命题VI28和VI29考虑了一元二次方程$x^2-ax+b^2=0$和$x^2-ax-b^2=0$的解法, 其中a和b表示已知线段的长度. 后世数学家给出了所有实根的几何方法.

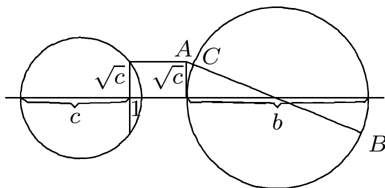
图1、2分别给出了方程 (1) $x^2-bx+c=0$, (2) $x^2+bx+c=0$, (3) $x^2-bx-c=0$, (4) $x^2+bx-c=0$的欧氏作图法.

每种解法都能用简单的几何和代数方法来检验. 例如, 检验$x_1=AC$和$x_2=CB$是方程$x^2-bx+c=0$的实根, 注意到图中$\dfrac{AC}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{c}}{CB}$, 然后有$c=AC\times CB$. 它代表着$c=x_1(b-x_1)$或$x_1^2-bx_1+c=0$.

用同样的方法可以检验$x_2=CB$.



(1) $x_1=AC$, $x_2=CB$
(2) $x_1=-AC$, $x_2=-CB$
图1



(3) $x_1=AB$, $x_2=-AC$
(4) $x_1=-AB$, $x_2=AC$
图2

其实, 这种方法, 我们并不陌生, 在初中几何的求值计算中曾使用过, 那是运用一元二次方程为求解几何问题服务的. 例如, 在图1中, 我们已知DC的值, 求AC或BC的长时, 就是先建立一元二次方程后求解而得的. 因此, 如果我们将一元二次方程的几何解法与一元二次方程的代数解法结合起来, 相互为用, 既发现了知识应用的视角, 又可以将相关内容融为一体, 达到融会贯通的境界.

二、卡莱尔的方法

苏格兰作家卡莱尔 (Thomas Carlyle, 1795–1881) 在平面解析几何的基础上发展了一元二次方程的几何解法. 卡莱尔在年轻时做过数学教师, 卡莱尔的关于一元二次方程$x^2+bx+c=0$的解法是使用一个特殊的圆与x轴的交点. 这个特殊的圆是以$(0,1)$和$(-b,c)$为直径的端点的圆. 若方程有两个实数解, 这个圆与x轴就有两个交点, 这两个交点的横坐标

就是方程的根, 即 x_1 和 x_2 是 $x^2+bx+c=0$ 的根. 图3用一个例子说明了这种方法. 假如方程只有一个实数解, 则这个圆与 x 轴相切, 切点的横坐标为方程的解. 假如方程无解, 则这个圆与 x 轴无交点.

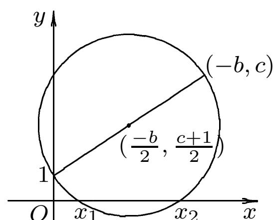


图 3

卡莱尔的方法可以用圆 $x^2+y^2+bx-(1+c)y+c=0$ 来验证. 令 $y=0$, 我们发现圆与 x 轴交点的横坐标是由方程 $x^2+bx+c=0$ 给出的. 这个横坐标就是已知方程的实根.

图4是卡莱尔方法的应用. 圆与 x 轴的交点的横坐标 -4 和 2 就是方程 $x^2+2x-8=0$ 的根.

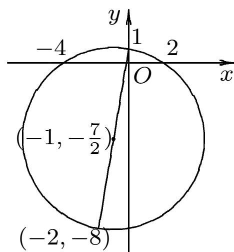


图 4

我们在解析几何的学习中, 经常去求圆 $x^2+y^2+bx-(1+c)y+c=0$ 与 x 轴的交点的坐标. 但我们很少做过一个一元二次方程变化为圆的方程, 通过画圆的方法来求解出一元二次方程的根. 建议通过此法的学习, 我们在讲解平面解析几何的相关问题时, 不妨可以适当地穿插一元二次方程的这种解法, 以提高学生学习数学的兴趣.

三、斯陶特的方法

德国数学家斯陶特 (K,G.C.von Staudt, 1798–1867) 曾在初等数学领域中取得过引人注目的成就, 以《仿射几何学》而闻名于世。他的一元二次方程几何解法如下:

已知一元二次方程 $x^2-gx+h=0$. 在平面直角坐标系中作出点 $\left(\dfrac{h}{g},0\right)$、$\left(\dfrac{4}{g},2\right)$, 连结此两点的线段与以 $(0,1)$ 为圆心的单位圆相交于点 R 和 S. 将点 $(0,2)$ 分别与点 R 和 S 连结并延长, 分别交 x 轴于点 $(r,0)$ 和 $(s,0)$, 则 r 和 s 就是这个已知方程的根.

事实上, 用 A 表示点 $(0,2)$, L 表示 RS 与 x 轴的交点 $\left(\dfrac{h}{g},0\right)$, T 表示与单位圆相切于 A 的直线与线段 RS 的交点 $\left(\dfrac{4}{g},2\right)$, 可得下列方程:

圆: $x^2+y(y-2)=0$,

直线 AR: $2x+r(y-2)=0$,

直线 AS: $2x+s(y-2)=0$,

则方程 $[2x+r(y-2)][2x+s(y-2)]-4[x^2+y(y-2)]=0$ 的图形经过点 A、R 和 S.

上述方程可化为 $(y-2)[2x(r+s)+rs(y-2)-4y]=0$.

它表示一对直线 $y-2=0$ 和 $2x(r+s)+rs(y-2)-4y=0$.

由于点 R 和 S 不在上述第一条直线上, 因此第二条直线一定是直线 RS. 令 $y=0$ 和 $y=2$. 利用直线 RS 的方程可得到:

$$OL=\frac{rs}{r+s}=\frac{h}{g},\ AT=\frac{4}{r+s}=\frac{4}{g}.$$

因而 $r+s=g$ 和 $rs=h$. 因此, r 和 s 是方程 $x^2-gx+h=x^2-(r+s)x+rs=(x-r)(x-s)=0$ 的根.

图5是斯陶特方法的应用. 由该方法可得方程 $x^2-2x-8=0$ 它的两根 $r=-2$ 和 $s=4$.

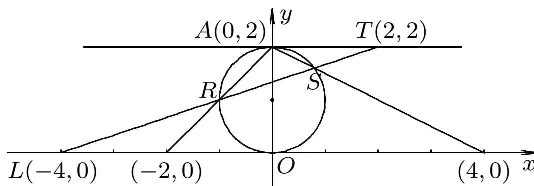


图 5

四、用抛物线 $y=x^2$ 解 $x^2+bx+c=0$

用平面解析几何解 $x^2+bx+c=0$ 的一般方法是: 先在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=x^2+bx+c$, 再确定抛物线与 x 轴的交点.

此外, 我们还可以应用标准抛物线$y=x^2$来解上述方程. 在同一坐标系中画出抛物线$y=x^2$和直线$y=-bx-c$, 然后找出它们的交点, 交点的横坐标即为方程的根.

图6给出的是方程$x^2-x-6=0$的解法. 当然, 假如抛物线与直线没有交点, 则方程的根为虚根. 下文我们将说明求虚根的方法.

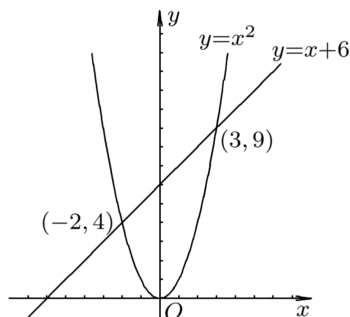


图 6

实际上, 一元二次方程$x^2+bx+c=0$的根也可以通过在同一坐标系中作出直线和标准三次函数$y=x^3$的图象而得到. 方程$(x-b)(x^2+bx+c)=x^3+(c-b^2)x-bc=0$的根为$b$以及方程$x^2+bx+c=0$的根. 在图象上, 他们是曲线$y=x^3$和直线$y+(c-b^2)x-bc=0$的交点的横坐标.

五、用等轴双曲线$xy=1$解答一元二次方程

1908年美国数学家舒尔茨(Arthur Schultz)出版的《图形代数》一书中介绍了使用等轴双曲线$xy=1$来解一元二次方程的方法.

在方程$ax^2+bx+c=0$中, 我们作代换$x=\dfrac{1}{y}$, 则有 $a\cdot\dfrac{x}{y}+\dfrac{b}{y}+c=0$或$ax+cy=-b$, 再考虑 $ax+cy=-b$, $y=\dfrac{1}{x}$,

解方程组, 得$ax^2+bx+c=0$的根.

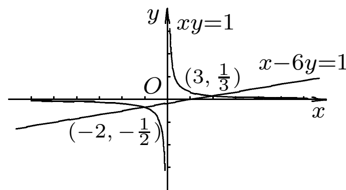


图 7

图7是方程$x^2-x-6=0$的解法. 等轴双曲线$xy=1$和直线$x-6y=1$交点的横坐标即为方程$x^2-x-6=0$的根.

方法四和五给我们的启示是, 除了本身的解法可谓是"数形结合"中的典范外, 更重要的是告诉了我们: 要想使"数形结合"的方法成为学生的一种思维习惯, 就要在这些基础性问题的解答中使用, 让学生体味、思考和领悟, 从而提高学生的数学思维能力. 同时, 要让学生在代数和几何的多种解法的熏陶中培养思维的品质, 感受数学知识的整体性及其价值.

六、求解$ax^2+bx+c=0$的虚根

上文中给出了用抛物线$y=x^2$和直线$y=-bx-c$来求方程$x^2+bx+c=0$实根的方法. 但当曲线$y=x^2$和直线$y=-bx-c$没有交点时, 方程有两个互为共轭的虚根. 舒尔茨在书介绍了求方程虚根的实部和虚部的几何方法.

当判别式$b^2-4c<0$时, 方程$x^2+bx+c=0$的两个虚根为$\dfrac{-b}{2}\pm\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{4c-b^2}}{2}$. 如图8, 在抛物线$y=x^2$的下方, 作出直线$L$: $y=-bx-c$, 作抛物线的弦AB平行于直线L. 过AB的中点M作x轴的垂线交直线L于N, 交抛物线于P. 在线段MN上取一点Q, 使$PQ=PN$. 过Q作一条平行于直线L的弦, 交抛物线于S和T. 过Q和T作x轴的垂线, 垂足为V和W, V点的横坐标即为方程根的实部, 线段VW的长度即为根的虚部.

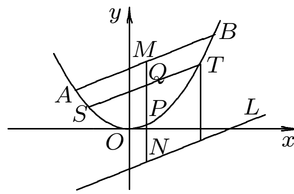


图 8

事实上, 设A和B的坐标为(x_1,x_1^2)和(x_2,x_2^2), 则有 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=-b$(直线$L$的斜率), $x_2+x_1=-b$, $\dfrac{x_2+x_1}{2}=-\dfrac{b}{2}$. 由于$M$是$AB$的中点, 它的横坐标是$\dfrac{x_2+x_1}{2}=-\dfrac{b}{2}$, 即方程根的实部.

下面我们来确定点W或T的横坐标. 由

一个“红灯与绿灯”的课题学习活动

313100 浙江省长兴古城中学 章新金

课题学习, 指的是在教师的组织和指导下, 将学生置于一种主动探究并注重解决问题的学习状态. 那么在新课程背景下的课题学习到底如何开展? 教师在课题学习中应扮演怎样的角色? 笔者以华东师大版八年级上册第十五章《频率与机会》作为知识背景, 以学生在七年级时曾进行过的课题学习作为经验, 开展一次题为“红灯与绿灯”的课题学习活动. 现将全过程呈现如下:

1. 结合学生身边事例, 引发问题情境

针对我校特殊的地理位置, 结合学校近期开展的安全宣传活动, 选择以雉城城西立交桥北侧十字路口交通违章现象严重威胁师生的生命安全为主题, 提出调查与分析.

2. 设计方案, 组织准备

首先, 组织学生讨论调查方案.

于 $PQ = PN$, 点 Q 的纵坐标为 c. 因此, ST 的方程为 $y-c=-b\left(x+\dfrac{b}{2}\right)$. 将 $y-c=-b\left(x+\dfrac{b}{2}\right)$ 和 $y=x^2$ 联立, 得到方程 $x^2+bx+\left(-c+\dfrac{b^2}{2}\right)=0$. 应用一元二次方程的求根公式得 $x=\dfrac{-b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$,

选择带有“+”的, 得到 T 的横坐标. 我们有

$$VW=\left(\frac{-b}{2}+\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)-\left(\frac{-b}{2}\right)=\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2},$$

此即方程根的虚部.

图 9 给出了方程 $x^2-2x+5=0$ 的解法. 点 $V(1,0)$ 的横坐标是方程共轭虚根的实部, $VW=3-1=2$ 为根的虚部. 于是所求根为 $1\pm 2\mathrm{i}$.

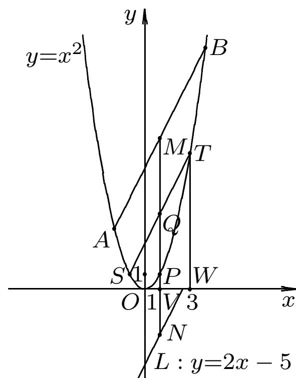


图 9

上文我们介绍了一元二次方程的六种几何解法, 用这些几何的方法来求解一元二次方程让人感到新鲜而有趣, 从中可以看到知识的力量和体味到一种数学的美感. 这些几何的方法看上去是那么的出乎意料, 但仔细想来却又在情理之中. 当我们在匆匆忙忙地赶教学进度, 教学生题型套路解法后, 若要是能静下心来思考一下所教的数学内容如何为前学内容服务时 (逆向思考), 我们也许会发现一片新天地. 这样不仅增强了所教内容的应用, 还培养了学生的创新意识和精神.

参考文献

[1] Euclid. *The Elements*, Vol. 1. translated by Thomas L. Heath. 2nd ed. Dover. New York. 1956.

[2] H. Eves. *An Introduction to the History of Mathematics*, 5th ed. Philadelphia: Saunders. 1983.

[3] J. Hornsby. Geometrical and graphical solutions of quadratic equations. *College Mathematics Journal* 1990. 21:362-369.

大家凭直觉感到, 早、中、晚上学、放学时段也正是该路段交通最繁忙的时段, 同时该时段是交警下班休息时间, 机动车驾驶员及行人往往大意或存有侥幸心理, 闯红灯等违章现象时有发生. 但如何展开调查? 收集哪些有价值的数据? 学生陷入深思, 于是我就引导学生一起讨论, 制定方案. 如采用表格式、提纲式、图形式等方法, 收集有价值的数据.

其次, 分组分工, 做到人人有事做.

我把全班同学分成八个小组, 其中第 ①、② 组负责早晨上学高峰时段的调查; 第 ③、④ 组负责中午放学高峰时段的调查; 第 ⑤、⑥ 组负责晚上放学高峰时段的调查; 第 ⑦ 组负责查阅红绿灯产生的有关背景资料, 有关红绿灯的交通法规, 访问交警叔叔, 了解一些我们中学生应该遵守的交通法规; 第 ⑧ 组负责收集有关的交通标志和标线, 收集有关交通安全隐患的例证.

3. 分组开展实地调查, 在活动中体验

学生积极性很高, 这次活动中, 上网查询有关红绿灯的背景资料及相关的交通法规共13篇, 访问交警叔叔的学生有8人次, 收集的交通信号、标志等图案有100多个, 自觉地去学习新交通法的有53人, 有12位同学提供软盘, 4位同学提供优盘. 所有的同学按时完成调查任务.

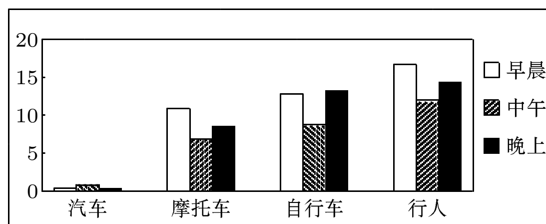
4. 课堂为学生提供表达交流的平台

在课堂教学中, 我先让各调查小组组长分别汇报调查结果, 提供收集的数据, 然后我利用电脑将各组汇报的数据现场输入, 电脑屏上马上呈现车辆、行人在不同时段的交通违章频率条形统计图和折线统计图. 如下为数据汇总结果:

雉城城西立交桥北侧十字路口机动车、自行车及行人闯红灯违章现象调查汇总表(一)

不同时段 违章频率 / 类型	早晨上学 6:20～6:50 违章频率(%)	中午放学 11:30～12:00 违章频率(%)	下午放学 5:00～5:30 违章频率(%)
汽车	0.12	0.19	0.13
摩托车	10.9	6.9	8.6
自行车	12.8	8.8	13.3
行人	16.7	12	14.4

车辆(行人)违章的频率条形统计图



雉城城西立交桥北侧十字路口部分时段的车流量情况调查表(二)

时间	负责组别	车流总量	每分钟车流量
早晨上学 6:20～6:50	① ②	2747	92
中午放学 11:30～12:00	③ ④	1449	48
下午放学 5:00～5:30	⑤ ⑥	3669	122

观察表中数据及条形图的特点, 向学生提出如下问题: 你有何发现? 有何感想? 有何建议? 学生分组讨论, 然后充分发表各自的看法.

学生1: “从条形图可看出, 行人违章率最高, 其次是自行车, 违章最低的是汽车. 主要原因是汽车驾驶员是经过专门培训的, 素质较高, 行人素质低. 从图中还可看出, 早、晚时段违章现象严重, 特别是行人和骑自行车的人. 究其原因可能是这两个时段没有交警值班, 并且车流量较大. 而汽车无论早、中、晚违章率都偏低, 说明汽车驾驶员素质较高. 表(二)的数据反映了早、晚车流量特别大, 主要原因是早晨和晚上, 上、下班的人特别多, 进城做买卖的人也多, 导致违章率高”.

学生2: 反驳说:“行人违章率高并不说明行人素质低, 可能是图方便, 而汽车不敢违章可能是怕万一撞了人要赔款······”

学生3: “新交通法规定人车相撞, 责任在车, 所以行人存有侥幸心理······”

学生4: “十字路口有‘电子警察’, 汽车司机不敢闯红灯, 否则要罚款, 被扣分. 所以汽车违章率低······”

学生5: “不对, 难道‘电子警察’只管汽车, 其它车辆和行人就不管了吗? ······”

还有许多学生也提出了类似的看法或其他不同的意见, 并提出一些建设性的建议. 如: 广泛宣传安全交通法; 加强人员培训, 提高安全意识; 增加该路口的交通高峰期的警力等.

用均值不等式求最值, 变不可能为可能

226006 江苏省南通师范学校 沈红霞

均值不等式$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(a、$b\in\mathbf{R}^{+}$)不仅可用于证明不等式, 也可用于求某些函数的最值, 在中学代数里有着非常重要的地位和作用. 用均值不等式求最值, 总是在当且仅当$a=b$成立时函数才能取得最值. 如:

引例 求函数$y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值.

解: $y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2\sqrt{5}$, 当且仅当$\sqrt{x^2+4}=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$, 即$x=\pm 1$时取等号, 此时原函数取得最小值$2\sqrt{5}$.

若遇到$a=b$不可能成立的情况, 如:

例1 求函数$y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值.

由于$\sqrt{x^2+4}\neq\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$(即无论$x$取何值, $\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$都不可能成立), 则认为此题不能用均值不等式求最小值. 《数学教学》2004年第12期刊登了一篇文章《利用函数单调性(证)解证不等式举例》, 文中的例1、例2就属于这种情况, 作者也认为不能利用均值不等式解证, 最后是借助导函数的符号用函数的单调性来解决的. 此类题真的不能用均值不等式解吗?

下面我们先来推导均值不等式. 对$a+b$用配平方法, 得 $a+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$ (a、$b\in\mathbf{R}^{+}$). (∗)

在(∗)中, 显然有完全平方式$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

① 若$a=b$能成立, 则$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$可取到0, 从而$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, 即为均值不等式;

教师在鼓励学生积极发表不同见解的基础上, 稍作引导和总结, 并留有一定的空间, 让学生课后继续讨论.

5. 课后延伸, 解决问题

通过课堂的生生互动, 思维碰撞, 许多学生产生了新的想法, 甚至有了更好的建议要阐述, 但由于课堂时间有限, 部分学生没有机会发言了. 为此我根据本次课题学习的调查情况, 要求每一位同学写一份关于雉城城西立交桥北侧十字路口交通违章情况的调查报告, 向学校和交通管理部门提出书面建议.

纵观整个“课题学习”的过程, 不仅培养了学生的综合实践能力、合作交流能力, 而且还进行了交通安全和社会责任感的教育, 达到了预期的效果.

参考文献:

[1] 胡余建. 初中数学教例剖析与教案研制. 广西教育出版社.

[2] 邱红松. 学生在活动课中获得了什么? 中学数学. 2004. 11.

[3] 周淑英. 对“初中数学课题学习”的认识与思考. 中小学数学. 2004. 12.

[4] 桂文通. 游戏进入课堂 数学更加好玩. 数学教学. 2004. 11.

[5] 陈桂生. 探索实施“初中数学课题学习”计划的方案.

http://www.fqhkzx.com/article/class17/class56/class58/200406/1657.asp.

[6] 潘振南. 浅谈“研究性课题学习”.

http://www.sgtjb.com:1/huaxue/readnews.asp?newsID=125.

② 若$a=b$不可能成立, 则$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$恒大于0, 此时如果$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$有最小值(设为k, $k>0$), 那么$a+b\geqslant k+2\sqrt{ab}$(当$ab$为定值时, $a+b$有最小值$k+2\sqrt{ab}$; 当$a+b$为定值时, ab有最大值$\left(\dfrac{a+b-k}{2}\right)^2$.

可将 ①、② 合并为 $a+b\geqslant k+2\sqrt{ab}$ (k是$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$的最小值, $k\geqslant 0$). (∗∗)

综上可得, (∗∗)是通过先对$a+b$配平方, 再根据完全平方式的值的特点得来的, 若它能为0, 则得 ①—均值不等式, 若它不能为0, 则得 ②. 均值不等式只是(∗∗)的一种特殊情况, 从这一角度看, 引例和例1属于同一种题型, 都可以用最基本的配平方法解决(引例解略).

解例1: $y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2+4}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+4}}\right)^2+2\geqslant k+2,$$

显然$\sqrt{x^2+4}\neq\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, 由于$\sqrt[4]{x^2+4}\geqslant\sqrt{2}$(当$x^2=0$时取得最小值), $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+4}}\geqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(也是当$x^2=0$时取得最小值), 所以当$x^2=0$时, $\sqrt[4]{x^2+4}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+4}}$取得最小值$\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故当$x^2=0$时, $\left(\sqrt[4]{x^2+4}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+4}}\right)^2$取得最小值$\dfrac{1}{2}$, 即$k=\dfrac{1}{2}$, 所以当$x=0$时, 原函数取得最小值$\dfrac{5}{2}$.

例2 求函数$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{2}+\dfrac{2}{\sin\theta}$ $(0<\theta<\pi)$的最小值.

解: 因为$0<\theta<\pi$, 所以$\sin\theta>0$, 所以$f(\theta)=\left(\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}\right)^2+2\geqslant k+2$, 显然$\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}\neq\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}$, 由于$\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}\geqslant\sqrt{2}$(当$\sin\theta=1$时取得最小值), $-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}\geqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(也是当$\sin\theta=1$时取得最小值), 所以当$\sin\theta=1$时, $\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}$取得最小值$\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故当$\sin\theta=1$时, $\left(\sqrt{\dfrac{2}{\sin\theta}}-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{2}}\right)^2$取得最小值$\dfrac{1}{2}$, 即$k=\dfrac{1}{2}$, 所以当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时, 原函数取得最小值$\dfrac{5}{2}$.

刚才通过探寻均值不等式的本质找到了直接解决例1例和2的方法, 虽然也很方便易行, 但总不如直接用均值不等式来得方便. 那么能否稍作变形, 使得$a=b$能成立(即再次配平方后得出的完全平方式能取到0), 最终变为仍能直接利用均值不等式呢? 回答是肯定的!

再解例1: $y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$$=\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}},$$

$\sqrt{x^2+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 4$, 当且仅当$\sqrt{x^2+4}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}$, 即$x=0$时取等号; 又$-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant-\dfrac{3}{2}$, 当且仅当$x=0$时取等号.

这表明, 当$x=0$时两个不等式同时取等号, 故$y\geqslant 4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

所以当$x=0$时, 原函数取得最小值$\dfrac{5}{2}$.

再解例2: $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{2}+\dfrac{2}{\sin\theta}=\left(\dfrac{\sin\theta}{2}+\dfrac{1}{2\sin\theta}\right)+\dfrac{3}{2\sin\theta}$, $\dfrac{\sin\theta}{2}+\dfrac{1}{2\sin\theta}\geqslant 1$,

当且仅当$\dfrac{\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{2\sin\theta}$, 即$\sin\theta=1$时取等号;

又$\dfrac{3}{2\sin\theta}\geqslant\dfrac{3}{2}$, 当且仅当$\sin\theta=1$时取等号. 所以当$\sin\theta=1$时, 原函数取得最小值$\dfrac{5}{2}$.

注意: 用上述拆项方法变形时, 不仅要保证均值不等式可用(即$a=b$能成立), 而且也要保证使原式变形后的前半部分取得最小值的x, 同时也使该式后半部分取得最小值, 这

解读贝特朗(Bertrand)悖论

276100 山东省郯城县美澳学校 石启亮

我们在讲解"人教社高一新教材A版" "几何概型"一节内容时遇到一个题目, 由于老师和学生之间出现了几种不同的解法, 得到不同的答案, 却一时又找不到问题的症结, 于是在学校图书室里找到了相关的资料, 发现了以例题形式出现的——贝特朗(Bertrand)奇论(也叫悖论).

∗在半径为R的圆C中任意引一条弦, 试求弦长L大于圆的内接正三角形边长$\sqrt{3}R$的概率P.

解法一: 如图1, 由对称性, 不妨先固定弦的一端点A于圆C上, 于是弦的另一端点B是"任意"的. 考虑正三角形ADE, 如果B落在角EAD所对的弧 $\widehat{DBE}$上, 则有$L > \sqrt{3}R$, 故$P = \dfrac{\widehat{DBE}\text{的长}}{\text{圆的周长}} = \dfrac{1}{3}$.

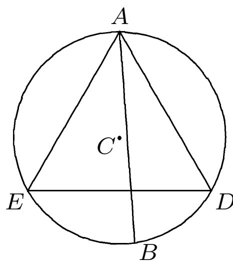


图 1

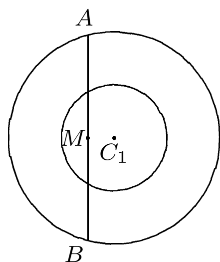


图 2

解法二: 如图2, 以$\dfrac{R}{2}$为半径作圆C的同心圆C_1, 弦的中点M是"任意"的, 如果点M落在圆C_1内, 则$L > \sqrt{3}R$, 故由几何概率公式知, 所求的概率P等于两圆的面积之比, $P = \dfrac{\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \dfrac{1}{4}$.

解法三: 如图3, 不妨先固定弦的方向使它垂直于直径EF, 如果弦的中点落在线段GH上, 则$L > \sqrt{3}R$. 故$P = \dfrac{|GH|}{|EF|} = \dfrac{1}{2}$ ($CH = CG = \dfrac{R}{2}$).

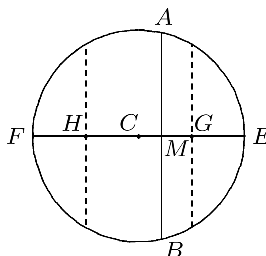


图 3

这里, 对"任意" (即几何概率型定义中所要求的"均匀性")的理解不同, 得出了三种不同的答案.∗

以上夹在两个∗之间的部分, 是高等教育出版社1984年版的高等学校试用教材《概率论与数理统计》(周树容编)中 "几何概率"一节的例题. 书中没有给出明确的正误判断, 只是说不同的理解得到三个不同的答案.

贝特朗知道, 三个答案不会都对, 但不知哪个对, 错的又为什么错.

通过研究发现, 答案$\dfrac{1}{3}$是正确的, 另两个答案是由于"不等价"转化造成的. 下面给出另一种解法.

解: 如图4, 设A、B是半径为1的圆C上的点, 自任意点M起分别按逆时针和顺时针方向移动(速度任意). 则A、B的任一位置都对应一条弦, 同时对应M到A和M到B的两条弧长, 分别记为x、y. 则(x, y)对应平面坐标系

样, 整个式子才能取得最小值.

参考文献:

1. 张铭. 利用函数单调性(证)解不等式举例. 数学教学. 2004. 12.

中一点, 则当x、y满足以下关系式时, 弦AB的长度大于$\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, \\ \dfrac{2\pi}{3} < x+y < \dfrac{4\pi}{3} \text{或} \dfrac{8\pi}{3} < x+y < \dfrac{10\pi}{3}, \end{cases}$$

画得下面的阴影区域. 即当点(x, y)落在图5中的阴影部分 (不包含四条斜线段) 时, $|AB| > \sqrt{3}$成立.

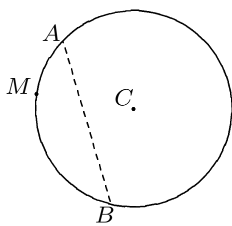


图 4

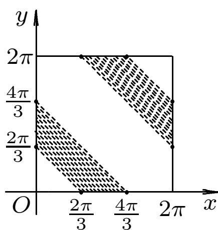
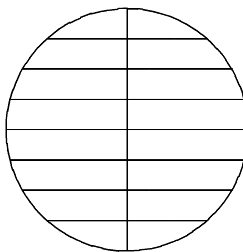


图 5

由几何概型概率公式得 $P(|AB| > \sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{3}}{4\pi^2} = \dfrac{1}{3}$.

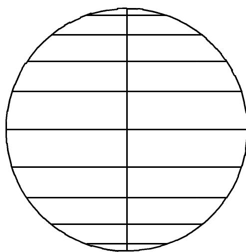
上面的解法是教材中典型的"双变量"几何概率问题解法, 它更好地体现了弦的"任意性", 比前面的解法一更容易让人接受.

那么, 另两个结果错在哪里呢? 我们知道, "转化"是数学解题常用的思想方法. 但是转化的最基本原则是"等价", 如果转化是不等价的, 那么就不可能有原命题的正确解答.



弦均匀

图 6

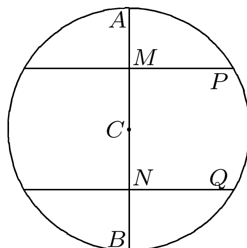


点均匀

图 7

先看解法三, 它是利用与直径垂直的"均匀弦的中点"等价代换"圆弧上的均匀点". 问题就出在这里, 因为它们是不等价的. 其实当垂直于一条直径的"弦均匀"时, 对应圆弧上的点的排列是"两头疏中间密"(图6); 而当圆弧上的"点均匀"时, 对应的垂直直径的弦的排列是"两头密中间疏"(图7).

我们需要的圆弧上点是"均匀的", 因此正确的结果是圆上弧长的比而不直径上线段的长度比 (图8).



$CN = CM = \frac{R}{2}$ $\quad \widehat{PQ} : \widehat{AB} = 1:3$

图 8

$|MN| : |AB| = 1:2$, 而 $\widehat{PQ} : \widehat{AB} = 1:3$.

对于分别从直径上取随机点作垂直弦和从圆弧上取随机点作垂直弦的两种情况, 我用"几何画板4.06"的迭代功能分别做了产生20万条弦的随机试验概率平均值分别为 0.5043和0.3324. 计算并没有错, 只是不等价转化的原因.

对于解法二, 是将点转化为面积出了问题. 从圆上可以直观看出, 相同数目的点, 由于离圆心远近不同, 它们的疏密程度不一样, 实际是"近密远疏". 所以用它们占有的面积来比就显得"不公平"了, 如图9.

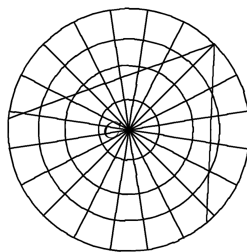


图 9

我用"几何画板"在整个圆上随机取两点作弦验证满足条件的概率的结果, 可以说明这一问题. 同样做了产生20万条随机试验, 得到概率的近似值为0.3328.

很显然, 每条弦只有一个中点, 有约$\dfrac{1}{3}$的弦的长度大于$\sqrt{3}R$, 那么必定只有约$\dfrac{1}{3}$的弦的

中点数落到了以 $\frac{R}{2}$ 为半径的小圆内部, 而并不是近似于大圆面积 $\frac{1}{4}$ 的比例数. 同样, 计算没有错, 又是转化的问题.

现在问题清楚了, 产生差异的原因是: 两种转化都不再体现弦的任意性.

圆内点的分布是均匀的, 但是弦的中点在圆内的分布是不均匀的.

由于几何型概率问题研究的是"无限"数目的基本事件总数, 因此"无限"到"无限"之间的转化很难把握, 说不定何时就会造成不易察觉的偏差或错误.

附: 下面给出几何画板的随机试验方法 (4.06中文版)

1. 打开几何画板, 画一个圆, 构造圆上任意两点, 记为 B、C. 以圆心为旋转中心将两点任意旋转一个角度. 不妨转90度, 得到点 B', C'. 构造线段 $B'C'$, 度量弦 $B'C'$ 的长度 $m\overline{B'C'}$, 度量圆的半径 R. 计算 $\sqrt{3}R$.

2. 新建参数 $t=0$, $n=1000$ (迭代次数). 计算 $t_1=t+1-\text{sgn}(1+\text{sgn}(\sqrt{3}R-m\overline{B'C'}))$. 作用是在迭代过程中记录满足条件的弦的数量. $\text{sgn}(x)$ 为画板自带的符号函数.

计算 $P=\frac{t_1}{n+1}$ (最后一行最后一格是频率, 概率的近似值).

3. 依次选取 B、C、t、n. 按住SHIFT键, 选择"变换"—"迭代", 用鼠标执行:

B—C, C—B, $t-t_1$.

4. 点击"结构"选"到所在对象的随机位置", 以及"生成迭代数据表". 点击"显示"选"最终迭代", 最后点击"迭代". 于是产生所需要的数据,

5. 参数 n 可以变化, 弦的数量是 $n+1$, 第一条是 $B'C'$.

6. 右键选表格, 点击"属性"—"迭代"—"开始随机化". 每击一次, 便会重新产生 $n+1$ 条弦, 同时表格中的数据随着变化. 相关图形如图10(其他模拟类似制作).

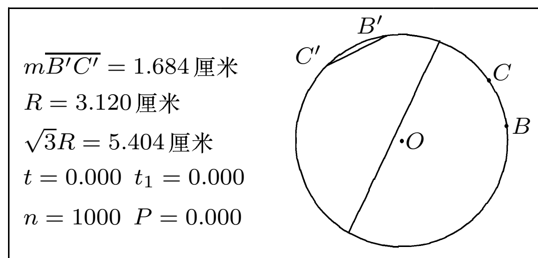


图 10

n	$m\overline{B'C'}$	t_1	P
0	1.684厘米	0.000	0.000
1	5.779厘米	1.000	0.001
2	0.943厘米	1.000	0.001
3	5.484厘米	2.000	0.002
4	5.423厘米	3.000	0.003
5	4.216厘米	3.000	0.003
6	6.074厘米	4.000	0.004
7	4.365厘米	4.000	0.004
8	1.388厘米	4.000	0.004
9	1.840厘米	4.000	0.004
10	3.263厘米	4.000	0.004
11	3.982厘米	4.000	0.004
12	6.240厘米	5.000	0.005
13	6.046厘米	6.000	0.006
14	2.259厘米	6.000	0.006
15	5.346厘米	6.000	0.006
16	5.345厘米	6.000	0.006
17	5.828厘米	7.000	0.007
18	2.164厘米	7.000	0.007
···	···	···	···
1000	6.216厘米	333.000	0.333

参考文献

周树容. 《概率论与数理统计》. 高等教育出版社. 1984. 9.

(上接第10–1页)

的民族主义.

事实上, 每个民族都有自己的文化, 也有属于这个文化的数学. 我们更应该放眼世界, 介绍中国科学的长处和短处, 吸收人家的长处为国家建设服务.

不可否认, 数学文化不等同于数学史, 微观的数学文化是什么? 如何使数学文化的魅力渗入教学, 让大家通过文化层面理解数学, 喜欢数学, 热爱数学, 这正是我们要进一步研究和探讨的.

以上列举、分析了近几年数学教学改革中的几种值得深思的现象, 在此笔者呼吁: 让数学课远离虚伪的美丽!

一道体现"双基+发展"的立体几何题

315000 浙江省宁波中学 王晓明

数学教学中的"双基", 一般约定指基本知识和基本技能. 但是, 中国的数学双基教学, 并非只抓双基, 而是同样注重发展. 不过, 我们是强调在数学双基的基础上进行发展和创新.

教学经验告诉我们, 数学"双基"是数学发展的基础, 典型数学例题则是数学发展的台阶. 精选典型例题, 学习和探究典型例题, 是逐步通向创造性发展的有效途径. 本文用一道立体几何的题目作为例子, 阐述双基教学中典型例题的作用.

一、课堂实践

我先请学生认识一个特殊的四面体, 四个面都是直角三角形. 这是一个非常基本的立体图形, 中国古代称之为"鳖臑".

那么, 在这一图形中有哪些垂直关系呢?这要诉诸学生的几何直观, 涉及立体几何中最基本的知识. 这样, 我们是从一个涉及线线、线面、面面相互垂直的典型例题开始, 检查学生的基本知识——空间的垂直观念.

题目　在四面体$ABCD$中, $\angle BCD=90°$, $AB\perp$面BCD, 如图1. 问 (1) 有多少对线线垂直? (2) 有多少对线面垂直? (3) 有多少对面面垂直?

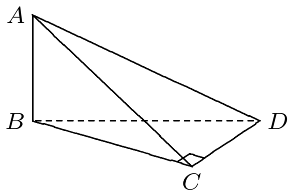


图 1

[学生典型解法]

(1) $AB\perp$面$BCD\Longrightarrow\begin{cases}AB\perp BC\\AB\perp BD\\AB\perp CD,\end{cases}$

又$BC\perp CD\Longrightarrow AC\perp CD$,

$\therefore$ 共5对线线垂直.

(2) $AB\perp$面BCD,

$\begin{cases}CD\perp BC\\CD\perp AC\end{cases}\Longrightarrow CD\perp$面$ABC$,

$\therefore$ 共2对线面垂直.

(3) $AB\perp$面BCD

$\Longrightarrow\begin{cases}\text{面}ABC\perp\text{面}BCD\\\text{面}ABD\perp\text{面}BCD,\end{cases}$

$DC\perp$面ABC

$\Longrightarrow\begin{cases}\text{面}ADC\perp\text{面}ABC,\\\text{面}BCD\perp\text{面}ABC\,(\text{已有}).\end{cases}$

$\therefore$ 共3对面面垂直.

[点评] 绝大多数同学都是按上述思路解决该问题, 且答案正确. 同学们都说已经碰到过该图形, 所以没有什么困难.

进一步教师启发学生得出解决该问题关键是抓住"线面垂直", 抓住了"线面垂直"也就抓住了本题垂直关系的"牛鼻子".

然后, 我要求同学们在此基础上进行发展. 看看增加一个条件之后的情形:

变式1　在四面体$ABCD$中, $\angle BCD=90°$, $AB\perp$面BCD, 又B在AC、AD上的射影分别为E、F, 连接EF, 如图2. 问

(1) 有多少对线线垂直?

(2) 有多少对线面垂直?

(3) 有多少对面面垂直?

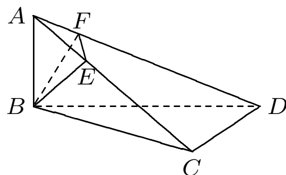


图 2

[学生典型解法]

生1: (1) 有10对线线垂直.

该同学用的是随意列举法, 少了1对.

(2) 有4对. $AB\perp$面BCD, $DC\perp$面CAB, $BE\perp$面ACD, $AD\perp$面BEF.

(3) 有5对. $AB\perp$面BCD

$$\Longrightarrow\begin{cases}面ABC\perp面BCD\\ 面ABD\perp面BCD,\end{cases}$$

$DC\perp$面ABC

$$\Longrightarrow\begin{cases}面ADC\perp面ABC\\ 面BCD\perp面ABC\,(已有),\end{cases}$$

$BE\perp$面ACD

$$\Longrightarrow\begin{cases}面ABC\perp面ACD\,(已有)\\ 面BEF\perp面ACD,\end{cases}$$

$AD\perp$面BEF

$$\Longrightarrow\begin{cases}面ACD\perp面BEF(已有)\\ 面ABD\perp面BEF,\end{cases}$$

生2: (1) 有10对线线垂直; (2) 有4对线面垂直; (3) 有5对面面垂直.

该同学先找线面垂直有4对, 然后由线面垂直推得面面垂直有5对, 再由线面垂直推得线线垂直有10对, 漏了1条.

生3: 先发现有4对线面垂直, 再发现有11对线线垂直, 再发现了有5对面面垂直.

该同学利用"在原题基础上增加了多少对? (与新增线段BE、EF、BF有关)"这个思路较快地解决了该问题.

[点评] 典型例题的发展就有了难度, 该题的解答明显区别出了学生的直观感知能力和思辩论证能力, 少数基础差的同学对于$AD\perp$面BEF的判断就有了困难, 体现了直观感知能力上的欠缺; 一般同学对该题中线面垂直、面面垂直的关系能有较好的判断, 但对线线垂直关系的全面判断有了困难, 体现出了思辩论证能力的差异.

变式2　在四面体$ABCD$中, $\angle BCD=90^\circ$, $AB\perp$面BCD, 又B在AC、AD上的射影分别为E、F, 连接EF, 又C在BD、AD上的射影分别为M、N, 连接MN, 如图3. 问

(1) 有多少对线线垂直?

(2) 有多少对线面垂直?

(3) 有多少对面面垂直?

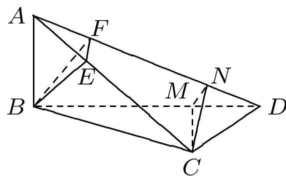


图 3

[学生典型解法] 先判断线面垂直有6对: $AB\perp$面BCD, $DC\perp$面CAB, $BE\perp$面ACD, $AD\perp$面BEF, $CM\perp$面ABD, $AD\perp$面CMN.

再由线面垂直推出面面垂直有7对: 面$ABC\perp$面BCD面$ABD\perp$面BCD, 面$ABC\perp$面ACD, 面$BEF\perp$面ACD, 面$ABD\perp$面BEF, 面$CMN\perp$面ABD, 面$ACD\perp$面CMN.

在由线面垂直推出线线垂直时, 有一对重复, 得到了20对的错误答案.

[点评] 在由线面垂直推出线线垂直时, 有许多同学出错(多若干或少若干), 说明这一小题对同学们的思辩论证能力要求很高. 正确答案为: 有19对线线垂直, 6对线面垂直, 7对面面垂直.

二、关于这道典型例题的"基础性"分析

本题及变式1、变式2是根据课本(A种)第40页习题14改编而来的. 它具有很显著的基础性特点:

1. 该四面体是棱锥中的一个最基本体. 任一棱锥$P-ABCD\cdots$中作$PO\perp$面$ABCD$于O, 作$OE\perp AB$于E, 连接PE、OB, 如图4, 则小锥体$P-OEB$就是这类四面体. 这个四面体通过四个直角三角形把棱锥的高PO、侧棱PB、斜高PE和底面边长等联系起来, 也将侧棱与底面所成角$\angle PBO$、侧面与底面所成角的平面角$\angle PEO$联系了起来(课本第48页). 事实上, 它在立体几何中的地位相当于直角三角形在平面几何中的地位.

2. 该四面体是立体几何题中常用的构造模型. 因为该四面体四个面均为直角三角形并且相关的几何量都在该图中出现, 所以在一个几何体中如能构造出该四面体, 则相关的几何量

都体现在四个直角三角形中,并且计算简便.在课本中的最小角性质$\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$(课本中第25页)、角平分面(课本第26页)、测量塔顶到路的距离(课本第27页)、斜坡上直道问题(课本第35页)等等都是通过构造这个模型来解决问题的.

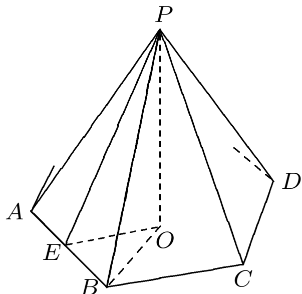


图 4

3.该题的解决过程中涉及线线垂直、线面垂直、面面垂直及三垂线定理,学生通过对该几何体的层层分析,不断深化对该几何体的认识,采取直观感知、思辨论证等方法认识和探索该几何体的性质,培养学生的识图能力,提高学生的空间想象能力和逻辑推理能力.

4.该题通过递层推进的设计,让学生通过实践逐步体验到线线垂直、线面垂直、面面垂直的联系,并且逐步认识到"线面垂直"的识别是问题的关键,抓住"线面垂直"就抓住了理解空间垂直关系的牛鼻子.

5.正因为该四面体是立体几何中的一个最基本体,是立体几何的一个基本知识点,同时也是考察学生识别应用图形等基本技能点的好载体,所以该四面体在各种参考书中都反复出现,并经常被用于各地高考模拟卷,甚至被直接用于高考考试,如2002年北京春季招生第18题,2004年天津理科第19题,而间接用于高考考试的就更多了.

三、关于这道典型例题的"发展性"分析

1.该题目的改编实际上是运用了开放题的办法.找出所有的垂直关系,不是一、两个,而是十来个,这已经开放了.然后又有变式加以扩充,更加完全.

2.题目本身是对几何体的定性分析,之后很自然可以定量地分析该四面体,如求相应的线线角、线面角和面面角,是在"双基"基础上的发展课题.

例如在四面体$ABCD$中,$\angle BCD=90^\circ$,$AB\perp$面BCD.

若$AB=4$, $BC=3$, $CD=2$.

Ⅰ.求异面直线AD与BC所成角;

Ⅱ.求二面角$B-AD-C$的大小.

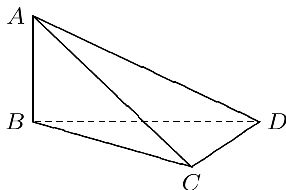


图 5

3.对于该四面体,由于AB、BC、CD两两垂直,所以以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\}$为基底,可以用向量法探究该四面体更多的性质.由于得到$\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2$,学生们把这个结论看成是勾股定理在空间的推广,则可以让同学们在回顾直角三角形的性质基础上,将这些结论类比到空间作一些探究,这是一个开放的问题,体现着创新性的要求.

	平面几何中的直角三角形	立体几何中的"直角"四面体
图形	在$\triangle ABC$中,$\angle BCA=90^\circ$,点C在AB上的射影为E	在四面体$ABCD$中,$\angle BCD=90^\circ$,$AB\perp$面BCD,点B、C在AD上的射影分别为E、F
勾股定理	$AB^2=AC^2+BC^2$	$AD^2=AB^2+BC^2+CD^2$
射影定理	$BC^2=BE\cdot BA$; $AC^2=AE\cdot AB$	$AB^2=AE\cdot AD$; $CD^2=DF\cdot DA$; $BC^2=EF\cdot AD$
夹角关系	$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=1$(其中$\theta_1$、$\theta_2$分别为边$AC$、$BC$与边$AB$所成的角)	$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$(其中$\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$分别为边$AB$、$BC$、$CD$与边$AD$所成的角)
	AB中点O为$\triangle ABC$外接圆圆心	AD中点O为四面体$ABCD$外接球球心

以圆为背景解决平面向量问题

325200 浙江省瑞安中学 戴海林

我们知道, 向量是一个既有大小又有方向的量, 当长度一定的向量绕起点旋转时, 终点的轨迹是一个圆. 如果能把圆的参数方程中的两个关键, 即半径及圆心角与向量的长度及向量间的夹角有机地联系起来, 我们就可以有效地解决许多向量问题.

下面的问题都围绕着以圆为背景展开, 事实上, 每个问题都还有其他解法.

一、从圆的定义出发

在我们所解决的向量问题中, 如果已知一向量的长度, 我们不妨从圆的定义出发, 作出一个以该长度为半径的圆(由于自由向量可以任意平移, 因此圆心可以任意选定), 再从圆的角度寻找解决问题的途径.

例1 (人教版高一教材(下)第151页, 复习参考题五(B)第6题) 已知向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OP_3}$满足条件 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{0}$, $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\left|\overrightarrow{OP_3}\right|=1$, 求证: $\triangle P_1P_2P_3$为正三角形.

分析: 如图1, 以点O为圆心, 1为半径作单位圆, 则点P_1、P_2、P_3都在此圆上, 由已知得 $-\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP}$, 则由平行四边形法则可知: 和向量$\overrightarrow{OP}$的终点$P$也在此圆上 (且与向量$\overrightarrow{OP_1}$方向相反), 可得$\angle P_2OP_3=120^\circ$, 同理可得 $\angle P_1OP_3=\angle P_1OP_2=120^\circ$, 则$\triangle P_1P_2P_3$是正三角形.

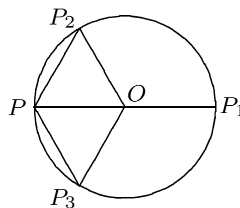


图 1

变题1 若$\triangle P_1P_2P_3$是正三角形. 向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OP_3}$满足条件 $\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\left|\overrightarrow{OP_3}\right|=1$, 则$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{0}$.

变题2 向量$\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OP_3}$两两所成的角相等, 且满足条件$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\left|\overrightarrow{OP_3}\right|=1$, 则$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{0}$.

(变题1与变题2也可以在此背景中获得证明, 过程略.)

例2 (人教版高一教材(下)第150页, 复习参考题五(B)第2题) 已知向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$两两所成的角相等, 并且$|\overrightarrow{a}|=1$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$, $|\overrightarrow{c}|=3$, 求向量$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$的长度及与三已知向量的夹角.

引申: 已知向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$两两所成的角相等, 并且$|\overrightarrow{a}|$、$\left|\overrightarrow{b}\right|$、$|\overrightarrow{c}|$成等差数列, 公差为$d$, 试问: 向量$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$与三已知向量的夹角是否都为与$d$无关的定值.

分析: 如图2, 设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC}$

这不又验证了“该四面体在立体几何中的地位相当于直角三角形在平面几何中的地位”吗?

4.对该四面体的认识可以渗透在整个立体几何学习过程中. 该四面体在课本中出现的次数就多达14次, 在课外练习中还会出现, 每个同学碰到该四面体至少二十次以上, 我们可以指导学生做一个长作业,让学生在整个立体几何学习过程中关注该四面体, 并将它们联系起来, 最后作一个总结.

总之, 本题值得为此而花一个课时的时间, 更值得让同学们做一个有意义的长作业.

$=\overrightarrow{c}$, 则由题意可知 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$, 以$O$为圆心, 分别以1、2、3为半径作三个同心圆, 由例1中的变题2可知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{0}$.

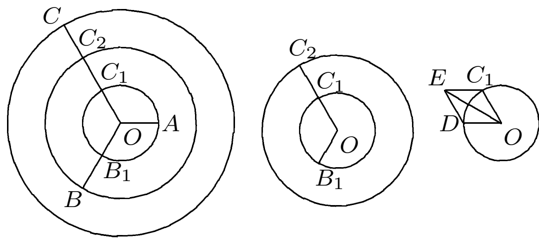


图 2

设$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OD}$, 则点$D$在此圆上, 且$\angle DOC_1=60°$, 因此, $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC_1}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=\sqrt{3}$, 易得向量$\overrightarrow{OE}$与向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的夹角分别是150°、90°、30°.

如果$|\overrightarrow{a}|$、$\left|\overrightarrow{b}\right|$、$|\overrightarrow{c}|$成等差数列, 我们同理可得向量$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$与向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的夹角分别是150°、90°、30°, 都是与$d$无关的定值.

二、从圆的性质出发

当我们所要解决的向量问题已经转化成以圆为背景时, 我们就应充分利用圆的几何性质来解决问题, 如圆中弦的中点及圆心的连线和该弦垂直; 圆的切线与过切点及圆心的半径垂直等, 这样直观有效.

例3 (2003年苏州市高考模拟试题) 已知平面上三个向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的模均为1, 它们相互之间的夹角均为120°.

(1) 求证: $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{c}$;

(2) 若$\left|k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|>1\,(k\in\mathbf{R})$, 求$k$的取值范围.

分析: 如图1, (1) 设$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OP_3}$, 则$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{P_3P_2}$.

由圆的几何性质可知 $P_3P_2\perp OP_1$, 则$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{c}$.

(2) 由例1中的变题2知 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$, 则$|(k-1)\overrightarrow{a}|>1$, 可得 $|k-1|>1$, 则$k>2$或$k<0$.

例4 (2003年南昌市高考模拟试题) 已知向量$\overrightarrow{OB}=(2,0)$, 向量$\overrightarrow{OC}=(2,2)$, 向量$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$, 则向量$\overrightarrow{OA}$与向量$\overrightarrow{OB}$的夹角的范围为…………………………( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;　　(B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12}\right]$;

(C) $\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$;　　(D) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$.

分析: 如图3, 以$C(2,2)$为圆心, 以$\sqrt{2}$为半径作圆, 则点A是在此圆上的一个动点, 由圆的几何性质可知:当OA与圆C相切时, 向量$\overrightarrow{OA}$与向量$\overrightarrow{OB}$的夹角分别取得最大与最小值, 易得 $\angle AOC=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle BOC=\dfrac{\pi}{4}$, 故选D.

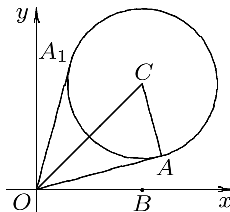


图 3

三、从圆的方程出发

当我们所解决的向量问题中, 如果已知的向量以坐标$(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$的形式出现时, 我们把该向量的起点移至原点, 结合圆的参数方程的意义, 不难发现, 它的终点即在以点(a,b)为圆心, 以r为半径的圆上, 而且可以将两个不同位置上的θ值的变化与两个向量的夹角进行合理转化.

例5 (2004年湖南省高考试题) 已知平面向量$\overrightarrow{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\overrightarrow{b}=(\sqrt{3},-1)$, 则$\left|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$的最大值是____.

分析: 易知向量$2\overrightarrow{a}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$, 则它的终点可以看成以原点为圆心, 以2为半径的圆上的一个动点, 若把向量$\overrightarrow{b}=(\sqrt{3},-1)$的起点移至原点, 则它终点也在此圆上, 显然, 当这两个终点的连线为直径时长度最大,且为4.

例6 (2003年郑州高考模拟试题) 已知向量$\overrightarrow{a}=(1+\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{b}=(1-\cos\beta,\sin\beta)$,

(下转第10–24页)

线性规划思想解题例说

257091 山东省东营市第一中学 苟玉德 张 军

线性规划是现代数学中研究最优化理论的重要模型,而新教材增加简单线性规划内容,不仅给传统的高中数学注入了新鲜“血液”,而且给学生提供了学数学、用数学的实践机会. 另外,由于平面区域是由不等式(组)来表示的,因此线性规划必然与不等式、函数、方程、解析几何等知识联系密切,而“在知识网络交汇点设计试题,促进学科内知识的交融和渗透”,正好是新课程高考命题的求新点和切入点.

本文尝试利用线性规划思想解决如下类型的问题.

一、解决函数问题

例1 设函数 $f(x)=ax^2+bx$, 且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围.

分析:此题易出现下列错误解法:由题意得

$$\begin{cases}-1\leqslant a-b\leqslant 2, & ①\\ 2\leqslant a+b\leqslant 4, & ②\end{cases}$$

由① + ② 得 $1\leqslant 2a\leqslant 6$. ③

由① − ②得 $-5\leqslant -2b<0$. ④

由 ③、④ 得 $-3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$.

上述解法中确定的 $1\leqslant 2a\leqslant 6$ 及 $-5\leqslant -2b\leqslant 0$ 是正确的,但是用 a 的最大(小)值及 b 的最小(大)值来确定 $4a-2b$ 的最大(小)值是不合理的,事实上当 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$ 时,得出 $4a-2b$ 的最小值为 -3,但此时 $a-b=-2$ 与已知条件中 $-1\leqslant a-b\leqslant 2$ 是不符的,故这种作法不正确,下面用线性规划的方法解决.

解:由题意得 $\begin{cases}-1\leqslant a-b\leqslant 2,\\ 2\leqslant a+b\leqslant 4,\end{cases}$ 设目标函数 $z=f(-2)=4a-2b$.

如图1,作出上述约束条件的可行域,其中 $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$、$B(3,1)$,当平行直线系经过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 时,目标函数取得最小值 $z=4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{2}=-1$;当平行直线系经过点 $B(3,1)$ 时,目标函数取得最大值 $z=4\cdot 3-2\cdot 1=10$,因此 $f(-2)\in[-1,10]$.

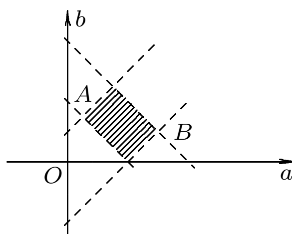


图 1

二、解决方程问题

例2 (2005年第16届“希望杯”竞赛高二第一试) 实系数一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的一个根在区间 $(0,1)$ 内,另一个根在区间 $(1,2)$ 内,则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是________.

解:设函数 $f(x)=x^2+ax+2b$,由题意得

$$\begin{cases}f(0)>0,\\ f(1)<0,\\ f(2)>0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}b>0,\\ a+2b+1<0,\\ a+b+2>0.\end{cases}$$

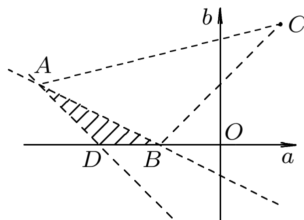


图 2

如图2,作出上述约束条件的平面区域 $\triangle ABD$ (不包括边界), 其中点 $A(-3,1)$、$B(-1,0)$、$C(1,2)$. 由于 $\frac{b-2}{a-1}$ 表示平面区域

$\triangle ABD$内的点(a,b)与点$(1,2)$连线的斜率, 其极端值可以由$\triangle ABD$顶点与点$(1,2)$连线的斜率确定.

由图得$k_{CA} < \dfrac{b-2}{a-1} < k_{CB}$, 又$k_{CA} = \dfrac{1}{4}$, $k_{CB}=1$, 所以

$$\frac{b-2}{a-1} \in \left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

例3　已知a、$b \in \mathbf{R}^+$, 方程$x^2+ax+2b=0$与$x^2+2bx+a=0$都有实数根, 求$a+b$的最小值.

解: 由题意得

$$\begin{cases} a^2-8b \geqslant 0, \\ (2b)^2-4a \geqslant 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a^2 \geqslant 8b, \\ b^2 \geqslant a. \end{cases}$$

类比线性规划中确定平面区域的方法可知上述不等式组表示在第一象限内抛物线$a^2=8b$与$b^2=a$的外部部分, 如图3所示. 因此问题转化为过阴影部分的点, 求$a+b$的最小值. 利用线性规划方法易求得$a+b$的最小值为6.

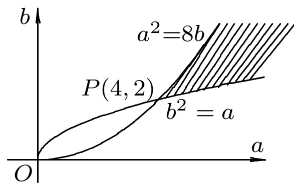


图 3

评注: 由上述两例可以看出, 当约束条件或目标函数不是线性问题时, 仍可利用线性规划思想赋予其直观的几何解释, 体现出线性规划思想的独特解题功能和应用的广泛性. 因此, 利用线性规划解决问题的数学思想从本质上讲就是数形结合的思想方法.

三、解决不等式问题

例4　已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+1$ (a、$b \in \mathbf{R}$, 且$a>0$), 设方程$f(x)=x$的两个实根为x_1和x_2.

(1) 如果$x_1<2<x_2<4$, 且函数$f(x)$的对称轴为$x=x_0$, 求证: $x_0>-1$;

(2) 如果$|x_1|<2$, $|x_1-x_2|=2$, 求b的取值范围.

证明: (1) 设$g(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+1$, 则$x_1$、$x_2$为方程$g(x)=0$的两根, 由题意得$\begin{cases} g(2)<0, \\ g(4)>0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} 4a+2b-1<0, \\ 16a+4b-3>0, \end{cases}$ 如图4, 作出其表示的平面区域, 其中$A\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right)$.

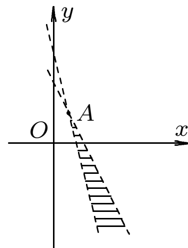


图 4

题设目标是证明$x_0=-\dfrac{b}{2a}>-1$, 即$\dfrac{b}{a}<2$, 设目标函数$z=\dfrac{b}{a}$, 而$\dfrac{b}{a}$表示可行域内的点(a,b)与坐标原点连线的斜率, 由可行域知$\dfrac{b}{a}<k_{OA}=2$, 故$x_0>-1$.

(2) $\because$ $x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0$,

$\therefore$ x_1、x_2同号且x_1、$x_2 \neq 0$,

当$0<x_1<2$时, 由$|x_1-x_2|=2$得$x_2=x_1+2$, 故$2<x_2<4$, 因此方程$g(x)=0$的两根分布在区间$(0,2)$、$(2,4)$内, 此时情形同(1), 而b表示可行域内点的纵坐标, 由可行域知$b<\dfrac{1}{4}$.

当$-2<x_1<0$时, 由$|x_1-x_2|=2$, 得$x_2=x_1-2$, 故$-4<x_2<-2$, 因此方程$g(x)=0$的两根分布在区间$(-2,0)$、$(-4,-2)$内, 所以有

$$\begin{cases} g(-2)<0, \\ g(-4)>0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 4a-2b+3<0, \\ 16a-4b+5>0. \end{cases}$$

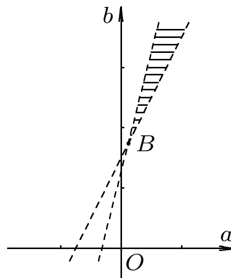


图 5

如图5, 作出上述约束条件的平面区域, 其

中 $B\left(\frac{1}{8},\frac{7}{4}\right)$, 由图象可知可行域内点的纵坐标均大于 $\frac{7}{4}$, 故 $b>\frac{7}{4}$.

例5 (2000年全国高中数学联合竞赛试题) 已知6枝玫瑰与3枝康乃馨的价格之和大于24元, 而4枝玫瑰与5枝康乃馨的价格之和小于22元, 则2枝玫瑰的价格和3枝康乃馨的价格比较结果是……………………………( )

(A) 2枝玫瑰价格高;

(B) 3枝康乃馨价格高;

(C) 价格相同; (D) 不确定.

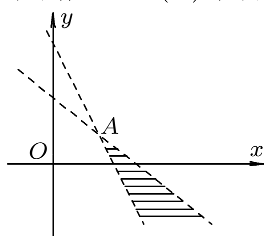


图 6

解: 设玫瑰的价格为 x 元, 康乃馨的价格为 y 元, 则 $\begin{cases}6x+3y>24,\\4x+5y<22,\end{cases}$ 作出其可行域如图6, 目标函数为 $z=2x-3y$, 作出平行线系 $2x-3y=t$ (t 为参数), 该平行线系应经过可行域内的点, 此时只需观察 t 的正负即可, 由 $\begin{cases}6x+3y=24\\4x+5y=22\end{cases}$ 得 $A(3,2)$, 而直线 $2x-3y=0$ 恰好通过点 A, 因此经过可行域内的点且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线在 y 轴上的截距为负, 所以平行线系 $2x-3y=t$ 的纵截距 $-\frac{1}{3}t<0$, 即 $t>0$, 所以目标函数 $z=2x-3y$ 的值恒大于0, 所以2枝玫瑰的价格要比3枝康乃馨的价格高, 因此选A.

四、解决解析几何问题

例6 抛物线 C 的顶点在坐标原点, 对称轴为 y 轴, 抛物线 C 上的动点 P 到直线 l: $3x+4y-12=0$ 的最短距离为1, 求 C 的方程.

解析: 由条件可知抛物线 C 的开口向下, 设其方程为 $x^2=-2py\,(p>0)$, 设 $P(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}d&=\frac{|3x+4y-12|}{5}\\&=\frac{1}{5}\left|3x-\frac{2}{p}x^2-12\right|\\&=\frac{1}{5}\left|\frac{2}{p}\left(x-\frac{3p}{4}\right)^2+12-\frac{9}{8}p\right|,\end{aligned}$$

上式中含有绝对值符号, 且不知 $12-\frac{9}{8}p$ 的正负, 因此无法确定何时取最大值, 如果能观察到图形中的平面区域分布, 可利用线性规划思想解决,从图7可以看出抛物线在直线 l: $3x+4y-12=0$ 的下方区域, 因此对点 P 而言 $3x+4y-12<0$, 故 $3x-\frac{2}{p}x^2-12<0$,

$$d=\frac{1}{5}\left[\frac{2}{p}\left(x-\frac{3p}{4}\right)^2+12-\frac{9}{8}p\right],$$

因此当 $x=\frac{3p}{4}$ 时, $d_{\min}=\frac{1}{5}\left(12-\frac{9}{8}p\right)=1$, 解得 $p=\frac{56}{9}$,

故抛物线 C 的方程为 $x^2=-\frac{112}{9}y$.

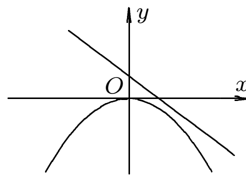


图 7

(上接封底)

至于学校和教师, 对遏制应试教育也有工作可做. 比如教师应该承认, 成绩的一分之差, 在评选智力上没有意义, 不要人为地把"从高分到低分"的录取神圣化. 校长应尽量给教师一些宽松的空间, 不要一次考试成绩差就批评. 培养学生学习兴趣, 提高学生能力需要一个过程, 多相信老师, 少一些"唯考试"、"唯分数"化的管理. 教师应该相信, "过度练习"、"大运动量演算"、"题海战术", 并非科学的做法. 刘翔的110米栏训练强度并不大, 主要是讲究科学.

值此全社会再度关注"应试教育"之际, 我们愿意抛砖引玉, 欢迎大家参与讨论. 本刊愿尽自己的绵薄之力.

再谈求函数取值范围的问题

556000 贵州省凯里市贵州黔东南民族师范高等专科学校 罗时健

我在文[1]中谈了求取值范围的几个问题,总觉得言犹未尽,想再谈一谈用一元二次方程的判别式求函数值域的问题，这也是求取值范围问题的一种常用的方法之一.

我们知道: $x\in\mathbf{R}$, 一元二次方程$ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$有解$\Longleftrightarrow \Delta=b^2-4ac\geqslant 0$, 但当前提条件$x\in\mathbf{R}, a\neq0$不能保证满足时, 运用$\Delta\geqslant0$求解, 就应特别慎重, 在有的情况下还需另觅他法. 先举个简单的例子.

方程$x^2-(1-\sqrt{1-p})x-\sqrt{1-p}=0$在$(1,+\infty)$内有根, 则$p$的取值范围为 ·········(　)

(A) $p\in\mathbf{R}$;　　(B) $p\in(-\infty,1]$;

(C) $\varnothing$;　　(D) 根本不能判定.

分析: 大前提为$x\in(1,+\infty)$. 前提条件有变. 此时若用判别式. 则有$\begin{cases}p\leqslant1,\\ \Delta\geqslant0,\end{cases}$ 得$p\leqslant1$, 选B,错!

不难看出, 方程有两根$x_1=-\sqrt{1-p}$、$x_2=1$(对$p\leqslant1$均成立). 今要求方程在$(1,+\infty)$有根, 这是不可能的. 因此只能选C. 可见, 对此题盲目搬套判别式法将致误. 因此, 运用判别式法求函数值域或求参变量的取值范围时, 需要慎之又慎, 要对具体问题作具体分析, 千万不可生搬硬套.

这里顺便指出一点: 若给出的区间I包含一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的所有根时, 仍可放心运用判别式. 这一点是显然的. 请继续看以下几例:

例1　求函数$y=\dfrac{2-x-x^2}{x-2}$的值域.

解: 函数定义域: $x\neq2$, 去分母化简上式得$x^2+(y+1)x-2(y+1)=0$. 显然$x=2$不是此方程的根, 可用判别式:

$\Delta=b^2-4ac=y^2+10y+9$, 由$\Delta\geqslant0$, 得$y\leqslant-9$或$y\geqslant-1$. 这是正确的.

例2　当$x\in[-3,-2]$时, 求函数$y=\dfrac{2-x-x^2}{x-2}$的值域.

如生搬硬套地用例1的解法, 而不顾及定义域$x\in[-3,-2]$(与前例$x\neq2$不同), 则仍得到$y\leqslant-9$或$y\geqslant-1$. 那就大错特错了.

事实上, $y'=-\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, 当$-3\leqslant x\leqslant-2$时, $y'<0$, 函数在$[-3,-2]$上单调递减, 于是$y_{\min}=y(-2)=0$, $y_{\max}=y(-3)=\dfrac45$, 得$0\leqslant y\leqslant\dfrac45$.

例3　求函数$y=\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}}{x-2}$的值域.

解: 函数的定义域由$\begin{cases}2-x-x^2\geqslant0,\\ x-2\neq0,\end{cases}$ 确定为$x\in[-2,1]$.

误解: 如不顾及定义域$x\in[-2,1]$, 则去分母化简得 $(y^2+1)x^2-(4y^2-1)x+(4y^2-2)=0, \Delta=b^2-4ac=-16y^2+9$, 由$\Delta\geqslant0$得$-\dfrac34\leqslant y\leqslant\dfrac34$. 不难看出这一答案是错误的, 因为当$x\in[-2,1]$时, $y\leqslant0$而$-\dfrac34\leqslant y\leqslant\dfrac34$就不正确了. 事实上. 只要作如下修正: $\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\ y\leqslant0,\end{cases}$ 便得到正确的答案$-\dfrac34\leqslant y\leqslant0$.

如对此答案还有怀疑. 则我们可以用另一种方法来印证它:

$y=\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}}{x-2}=\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}-0}{x-2}$, $x\in[-2,1]$,

这是点$P(x,\sqrt{2-x-x^2})$与定点$Q(2,0)$的连线l的斜率, 将点P坐标改写为

$P(t,\sqrt{2-t-t^2}), t\in[-2,1]$,

数 学 问 题 与 解 答

2005年第8期问题解答

651. 在凸四边形 $ABCD$ 中, 边 AB、DC 的延长线交于点 E, 边 BC、AD 的延长线交于点 F, 若 $AC \perp BD$ 于 G, 求证: $\angle EGC = \angle FGC$.

证: 如图 1, 过 E、F 分别作直线 BD 的垂线. 垂足分别为 M、N. 由 $AG \perp BD$ 知 $ME /\!/ AG /\!/ NF$,

$$\therefore \ \frac{MG}{BG} = \frac{AE}{AB}, \ \frac{NG}{DG} = \frac{AF}{AD}.$$

图 1

两式相除, 并整理有

则 $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2 - t - t^2} \geqslant 0, \end{cases}$ 这一参数方程表示的是以 $O'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 为圆心, 半径 $R = \frac{3}{2}$ 的上半圆. 当直线 l 成为圆的切线时(如图1), l 的斜率 $\lambda_0 = y$ 达最小, 易见 $y \leqslant 0$. 又 $\mathrm{Rt}\triangle PO'Q$ 中 $O'P = \frac{3}{2}$, $|O'Q| = \frac{5}{2}$, 则 $|PQ| = 2$, $y_{\min} = \tan\angle PQx = -\tan\angle PQO' = -\frac{3}{4}$, 于是 $-\frac{3}{4} \leqslant y \leqslant 0$.

图 1

例4　求函数 $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x + 1}$ 的值域.

误解: 易知函数定义域为 $x \in \mathbf{R}$, 去分母化简可得 $(2y-1)x^2 + (2y-1)x + (y+2) = 0$. 计算 $\Delta = b^2 - 4ac = -(4y^2 + 16y - 9)$. 由 $\Delta \geqslant 0$, 得 $-\frac{9}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$. 答案又错了! 之所以错, 就是没有注意到对一元二次方程 $(2y-1)x^2 + (2y-1)x + (y+2) = 0$ 运用判别式, 还应有前提条件 $a = 2y - 1 \neq 0$. 即 $y \neq \frac{1}{2}$. 只要作此修正 $\begin{cases} \Delta \geqslant 0, \\ 2y - 1 \neq 0, \end{cases}$ 则可得正确答案 $-\frac{9}{2} \leqslant y < \frac{1}{2}$!

总之, 对求"函数值域"形式出现的取值范围问题. 因为函数值域与定义域有关, 用判别式时又与前提条件有关, 稍一不慎就会导致出错. 所以笔者认为, 判别式法还是应当慎用为妥. 对学生介绍使用判别式法求函数取值范围问题时, 一定要引导学生对具体问题作具体分析, 切勿不加分析, 千篇一律照搬照套形式.

参考文献

[1] 罗时健. 《关于求"取值范围"的一些问题》. 数学教学. 2005. 2.

$$\frac{MG}{NG}=\frac{AD}{AF}\cdot\frac{AE}{AB}\cdot\frac{BG}{DG}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

又 $\frac{ME}{AG}=\frac{BE}{AB}$, $\frac{NF}{AG}=\frac{DF}{AD}$. 两式相除, 得 $\frac{ME}{NF}=\frac{BE}{AB}\cdot\frac{AD}{DF}\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

因 AC、BF、DE 交于 $\triangle ABD$ 外的点 C. 由塞瓦定理, 得 $\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DF}{AF}=1$,

即 $\frac{BG}{DG}=\frac{AF}{DF}\cdot\frac{BE}{AE}\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

由 ①、②、③ 得 $\frac{MG}{NG}=\frac{ME}{NF}$.

$\therefore$ Rt$\triangle EMG\backsim$Rt$\triangle FNG$, $\angle MGE=\angle NGF$. 进而 $\angle EGC=\angle FGC$.

652. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, BE、CF 分别为 AC、BD 边上的高, 设 BE、CF 交于 M, BC、FE 交于 N, 求证: $MN\perp AD$.

证: 设 BC 边上的高为 AG (AG 显然过 M), 连结 ED、EG, 过 C 作 DE 的平行线, 交 EN 于 H.

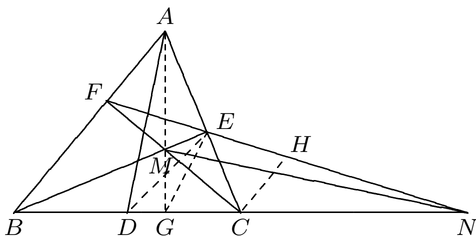


图 2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CN}\\&=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|\cos B+\\&\quad\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right|\cos\angle BCM+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|\\&=-\left|\overrightarrow{BG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CG}\right|\\&\quad+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|\\&=-\left|\overrightarrow{DG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CG}\right|\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

$\because$ D 是 Rt$\triangle BCE$ 斜边 BC 中点,

$\therefore$ $DE=DC$, $\angle DCE=\angle DEC$.

又 A、B、G、E 及 B、C、E、F 均四点共圆. $\therefore$ $\angle GEC=\angle B=\angle NEC$, $\angle DGE=\angle GCE+\angle GEC=\angle DEC+\angle NEC=\angle DEN$.

另一方面, 由 $DE/\!/CH$ 知 $\angle DEN=\angle CHN$, $\angle EDG=\angle HCN$,

$\therefore$ $\triangle DGE\backsim\triangle CHN$, $\frac{DG}{DE}=\frac{CH}{CN}$, 即 $DG\cdot CN=DE\cdot CH\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

又 $\angle ECH=\angle DEC=\angle DCE$, 且有 $\angle CEH=\angle CEG$, 故 $\triangle ECH\cong\triangle ECG$, $CH=CG$. 结合 $DE=BD$, 代入 ② 式得 $DG\cdot CN=BD\cdot CG\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

③ 代入 ① 有 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}=0$,

$\therefore$ $MN\perp AD$.

653. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$, $x_{i+1}-x_i=\sqrt{x_{i+1}+x_i}$ $(i=1,2,\cdots)$, 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解: 由 $x_{i+1}-x_i=\sqrt{x_{i+1}+x_i}$ 知 $x_{i+1}-x_i\geqslant 0$, 又 $x_1=1$, 从而 $x_i\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots)$.

将 $x_{i+1}-x_i=\sqrt{x_{i+1}+x_i}$ 两边平方并整理得 $x_{i+1}^2-(2x_i+1)\cdot x_{i+1}+x_i^2-x_i=0$,

$\therefore$ $x_{i+1}=\frac{2x_i+1\pm\sqrt{8x_i+1}}{2}$.

若 $x_{i+1}=\frac{2x_i+1-\sqrt{8x_i+1}}{2}$, 则 $x_{i+1}-x_i=\frac{1-\sqrt{8x_i+1}}{2}<0$, 不合题意.

$\therefore$ $x_{i+1}=\frac{2x_i+1+\sqrt{8x_i+1}}{2}$,

$2x_{i+1}=2x_i+1+\sqrt{8x_i+1}$,

$8x_{i+1}=8x_i+4+4\sqrt{8x_i+1}$, $8x_{i+1}+1=8x_i+1+4\sqrt{8x_i+1}+4=(\sqrt{8x_i+1}+2)^2$,

$\sqrt{8x_{i+1}+1}=\sqrt{8x_i+1}+2$.

于是 $\{\sqrt{8x_n+1}\}$ 是首项为 $\sqrt{8x_1+1}=3$, 公差为2的等差数列. 故 $\sqrt{8x_n+1}=3+2(n-1)$, $x_n=\frac{n^2+n}{2}$.

654. 设 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$, 且 $x+y+z=k$, 当 $k\leqslant 1$ 时, 求 $u=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)$ 的最小值.

解: 由熟知的不等式: $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ac)$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取等号) 易知 $xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3(xy^2z+yz^2x+zx^2y)}=\sqrt{3xyz(x+y+z)}=\sqrt{3xyzk}$.

$$u=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)$$
$=\dfrac{1}{\sqrt{xyz}}(1-x)(1-y)(1-z)=\dfrac{1}{\sqrt{xyz}}[1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz]\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{xyz}}(1-k+\sqrt{3xyzk}-xyz)=-\sqrt{xyz}+\dfrac{1-k}{\sqrt{xyz}}+\sqrt{3k}.$

$\because 0<k\leqslant 1$, $\therefore g(t)=-t+\dfrac{1-k}{t}+\sqrt{3k}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数, 而 $0<\sqrt{xyz}\leqslant\sqrt{\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\dfrac{k}{3}\right)^3}$,

$$\therefore g(\sqrt{xyz})\geqslant g\left(\sqrt{\left(\frac{k}{3}\right)^3}\right),$$

即 $-\sqrt{xyz}+\dfrac{1-k}{\sqrt{xyz}}+\sqrt{3k}\geqslant-\sqrt{\left(\dfrac{k}{3}\right)^3}+\dfrac{3\sqrt{3}(1-k)}{\sqrt{k^3}}+\sqrt{3k}=\left(\sqrt{\dfrac{3}{k}}-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)^3$,

$\therefore u\geqslant\left(\sqrt{\dfrac{3}{k}}-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)^3$, 当且仅当 $x=y=z=\dfrac{k}{3}$ 时取等号.

故当 $x=y=z=\dfrac{k}{3}$ 时, u 取最小值 $\left(\sqrt{\dfrac{3}{k}}-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)^3$.

655. 设 a、b、c、d 皆为正实数, 求证:
$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+d}+\frac{c}{2d+a}+\frac{d}{2a+d}\geqslant\frac{4}{3}\cdots①$$
等号当且仅当 $a=b=c=d$ 时成立.

证: 根据柯西不等式: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{y_i}\geqslant\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}$ $(x_i>0,\ y_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 有
$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+d}+\frac{c}{2d+a}+\frac{d}{2a+d}$$
$$\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{a(2b+c)+b(2c+d)+c(2d+a)+d(2a+b)}$$
$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$\because (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geqslant 0$,

$\therefore 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$,

$3(a+b+c+d)^2\geqslant 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdots\cdots\cdots\cdots③$

由②、③即得①, 注意到③式等号当且仅当 $a=b=c=d$ 时成立, 立得①式等号当且仅当 $a=b=c=d$ 时成立.

2005年第10期问题

656. 在非直角 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, $CF\perp AB$, 垂足分别为 D、E、F, 设 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 外接圆半径分别为 R、R_0, 求证: $R=2R_0$.

(浙江　李康海供题)

657. 已知互不相等的实数 x、y、z 满足 $|xy+2|=\sqrt{1+(x+y)^2}$, $|xz+2|=\sqrt{1+(x+z)^2}$, 求证: $|yz+2|=\sqrt{1+(y+z)^2}$.

(湖北　贺　斌供题)

658. 已知 α、β 为锐角, 且 $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin(2\beta+\alpha)}{\sin 2\beta}$, 求证: $\alpha=\beta$.

(江苏　李广修供题)

659. 已知 A_1、B_1、C_1 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上, 满足 $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{AC_1}{C_1B}=\lambda$, 记 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点, 求 $PA_1^2+PB_1^2+PC_1^2$ 的最小值.

(浙江　苏炜杰供题)

660. 记 $\sigma(n)=\sum\limits_{d|n}d$ (其中 n、$d\in\mathbf{Z}^+$), 若 $\sigma(n)=2n$, 则称 n 为完全数.

设 $a=2^{p-1}(2^p-1)+1$, $b=2^{p-1}(2^p-1)-1$, 其中 p 为质数, 问 a、b 是否为完全数? 证明你的结论.

(安徽　江厚利供题)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

由于数学能力下降, 美国学校从亚洲寻求答案

Cris Prystay

五年前, 在马萨诸塞州全州范围内进行了一次考试, 在考试中发现, 从四年级到六年级学生的数学能力严重下降. 马萨诸塞州州教育厅长建议用一种超出常规的方式加以弥补: 引进在新加坡使用的数学课程.

新加坡学生在国际数学测试中经常名列前茅. 他们希望用新加坡的教学方式教美国孩子, 帮助他们提高数学成绩.

从俄克拉何马州的乡村到新泽西州的中心城市, 全国各地近两百所学校采用了这种方式. 使用初期的迹象表明: 用了新加坡的课本后, 许多美国学生数学方面确实有了更优秀的表现. 一些曾被数学课弄得灰心丧气的孩子说他们现在开始喜欢数学了.

越来越多的教育者为美国孩子数学能力的下降而忧心忡忡, 他们希望从亚洲的课程中寻求灵感. 由于现在的美国孩子在数学和自然学科两方面都落在亚洲同龄人的后面, 那么当他们大学毕业时, 很有可能会把更多的白领职位拱手让给海外同龄人.

"看起来我们的孩子恰恰缺少他们本该拥有的数学头脑, 我们决心尽一切努力加以弥补." 马萨诸塞州州教育厅长David Driscoll说. David Driscoll自己曾是一名数学教师, 他首先萌发了在当地学校使用新加坡教材的念头.

评论家们断言说过去二十年里美国的数学教学被搞乱了, 他们指出: 教学重点过多地放在让课程变得更容易理解, 或激发兴趣上, 不在如对乘法表进行反复训练等这类至关重要的部分. 另一种重要的批评指出: 美国数学教材注重内容覆盖面的广度, 却没有足够的深度.

新加坡和其他东南亚国家采取的却是另一种策略. 在新加坡, 教材由教育部聘请数学专家编著. 这些专家为寻求有效的教学方式, 有针对性地解决孩子的疑问, 过去几十年来, 坚持不断地与数学教师面对面交流, 逐步完成了对教材的完善和发展. 他们的小学课本只选取了美国教材中三分之一的典型题材, 但介绍的内容却更深入更透彻.

除了进行机械记忆外, 新加坡孩子还学习用直观的工具来帮助理解抽象的概念.

比如: 新加坡数学课本要求孩子们使用画线段和其他图表的方法——一种被称为 "线段图"的方法, 使问题看起来更具体、更直观. 当孩子们经过几年持续的训练后, 他们解决综合性问题的能力和心算能力就有了明显的提高.

并非每个人都相信引进新加坡课本的方法能解决美国的数学问题. 有些州声称这方法不符合他们本州制定的数学教学大纲. 在美国各州有不同的教学大纲, 所以学生使用的新加坡教材和各州大纲要求学生掌握的内容之间存在着潜在的差距. 全美数学教师协会(NCTM)提出不可能单单用引进教材的方式来照抄新加坡的做法. NCTM辩称: 新加坡数学教学的成功, 根源在于他们高度自律的文化背景, 即整个社会尤其是父母亲期望孩子全身心投入学习, 发奋努力.

但美国的数学教学需要改进, 这一点几乎是毋庸置疑的. 波士顿学院每四年都要发表一次与亚洲之间存在的数学差异的全球报告. 该学院发布的"1999年数学国际测试(TIMSS)"报告显示, 新加坡八年级学生的数学成绩排名第一, 而美国仅排在第19名, 排在拉脱维亚的后面. 美国孩子在读的年级越高, 拉下的差距越大, 根据1995年的报告显示, 美国四年级学生数学成绩排在第七位.

这种下降的趋势已经对美国的大学产生了冲击. 根据由国家拨款的国家科学基金会下属的国家科学部提供的数据, 在美国攻读理工专业的大学一年级学生中, 五分之一申请补习数学课程. 同时毕业于理工专业的大学生中, 美国公民和永久居住在美国的人数从1994年到2001年下降了10%. 外籍学生人数则增长了35%.

这一差距也使美国面临着失去更多海外就业机会的危险. 在一次波士顿金融会议上联邦储备委员会主席Alan Greenspan说: “令许多人苦恼的是这可能不只是暂时的问题, 其根源贯穿于我们整个教育体系.”

改革美国课程确实有一定难度. 与新加坡和其他亚洲国家不同的是, 美国没有全国统一的课程. 每个州独立制定教学大纲. 在布什“不让一个孩子落后”的政策下, 财政拨款和就业与学校在本州的标准测试成绩息息相关. 许多行政区官员因为担心本地区学校在这类考试中成绩下降, 很愿意进行一些改革. 其中一部分正从亚洲教材中寻求改革的答案. 乔治亚州在中学教材改革中计划采用日本的数学大纲. 根据新加坡小学数学课程改编, 由密歇根州立大学数学教授撰写的一本教师培训教材, 已被美国六所大学使用. 新加坡儿童的数学教材吸引力最大, 因为他们的教材是用英语写的.

在俄克拉何马州的Bethel乡, 学区负责人Marty Lewis觉得该区学生的数学成绩正在下降. 他对新加坡开始只是好奇, 继而被“1999年数学国际测试” (TIMSS)的结果激怒了. 他对新加坡的教学方法进行了研究, 并和在宾夕法尼亚州的Rosenbaum个人基金会有了接触, 该基金会为在美国和以色列使用新加坡教材提供基金.

基金会为他联系了在佛罗里达州的一个专门培训教师教新加坡教材的数学教师Yoram Sagher. Lewis聘请Sagher先生在七月份给学区全体教师补了一周的课. 九月, Bethel乡幼儿园孩子和一年级学生开始使用新加坡教材. “我想说的是: 不管人们觉得我有多疯狂, 我还是要看看外面的教材, 并寻找有效的方式.” Lewis说.

一些地区的学校已经开始大量使用新加坡教材. 其中包括离波士顿仅一小时汽车路程的North Middlesex, 那里居住的是一些从事农业或坐公交车上班的人们. North Middlesex地区的教材改革是在州教育厅长Driscoll先生注意到本州六年级学生数学能力下降后开始的. 2000年, 他用美国政府下拨的50000美元在他所在的地区进行调查, 检验新加坡课程是否能提高孩子们的数学成绩.

North Middlesex派遣了三个拥有数学学位的教师和在马萨诸塞州的伍斯特州立学院的一个数学教授共同工作. 他们根据新加坡教材对North Middlesex地区的教师进行了为期七天的暑期补课.

新加坡课程的教学从最需要帮助的五年级到八年级学段开始. 由于有很多教师自愿加入, 新课程教学同时也延伸到了其他学段.

不久前的一个早上, 在North Middlesex的一个名为Ashby的小镇上, 五年级数学教师Bob Hogan给出这样一个问题要求学生自愿回答: 假设在一所大学中某班共有250人, 其中男生人数比女生多50个, 求这个班中女生的人数. 三十岁的Hogan先生是一个精力充沛的老师, 他要求学生回答怎样用线段图来解决这个问题. Sarah Carter, 一个头发鲜红、脸上长着雀斑的九岁女孩, 从座位里向前倾身举起了手. 她让Hogan先生先画两条长短相同的线段, 并在上面一条标上“女生”, 下面那条标上“男生”. 然后她要求在标有男生的那条线段后面再添上一小段, 并在里面写上“50”; 同时在两条线段图的右侧, 写上“250”, 表示两者的总和. 看着这张图, 她不用纸笔开始口算. 她从250中减去50, 要求老师将得数“200”写在黑板上没写数字的两条线段左侧, 表示这两段的总和. 然后, 她将200除以2, 并得出结果“班里有100个女生, 150个男生”. “我不知道新加坡在哪里,”她补充道, “但我喜欢他们做数学题的方法.”

刚开始时, 一部分教师并不相信. 教七年

级的Steve Keating是一个经验丰富的数学教师, 他说他曾经经历了一大堆的新数学方式, 包括二十世纪七十年代疯狂的"新数学"运动. "我最初的感觉是'又来了'." 谈到用新加坡数学教材时, 他说. 他着实被新加坡的教材吓了一跳. 到了七、八年级, 学新加坡课程的孩子已经开始学高中水平的代数了. "我想, 哇——这很复杂——甚至于对我". Keating说. 当他看到自己的学生变得对数学充满热情时, 他终于被征服了.

这一改革需要更多教师的加入. 新加坡的数学课程不像许多美国课程, 不是每个问题, 每一步都有写给教师的参考答案. 教师也不能从书本的后面去翻看答案. 在第一年里, Keating先生每天晚上要用两个小时准备第二天的课. 在暑假里, 他还把教科书带到度假的海边. 他的努力终于有了回报: 学生们的成绩提高了.

一些父母也有着疑问. Suzanne Carter回忆道: 原来数学题做得很辛苦的女儿Sarah, 回家后不再做以前那种数学了, 取而代之的是画线段和矩形. "我很失望, 弄不懂她在干什么." 手语教员Sarah夫人说. 但是她女儿学校却不需要作任何解释. 在North Middlesex学校的学生已经在本州统考中取得了进步. 例如, 八年级学生在今年的州统考中, "数学能力指数"从2000年的63.2分上升到了75.4分, 增值是也有所提高的州增值的两倍. 其他年级的成绩也有所提高, 但只是达到了该州的平均水平.

North Middlesex为得到更明确的结果, 最近又聘请了斯坦福大学胡佛研究所对州或区的部分测试成绩进行分析, 看看使用了一至三年新加坡教材的三百个学生在数学方面是否比其他学生更好. 正在进行的研究已发现, 用新加坡数学教材的学生有特别强的计算能力.

去年波士顿公立学校在一所学校的某些班级中试用新加坡的教材, 但后来决定放弃. 这个地区采用了另一种称为讨论班模型的数学教材, 通过理解数学概念, 增进孩子们进行个体或团体活动的能力. 他们并不想贬低新加坡教材, 只是想在更大范围内通过实验尝试新的东西.

波士顿公立学校数学课程负责人Ed Joyce说: "我们不会说新加坡教材有什么不好, 但我要说的是许多教材可能会有同样的结果." 另一个应用新加坡教材的障碍是美国人对标准测试的迷信. 用新加坡教材的孩子可能在数学的一些重要内容如乘法、分数、文字题和代数的部分表现得更好, 但应付出现在本州统考中的另一些问题仍然很辛苦.

所以North Middlesex在新加坡的教材中补充了概率内容的教学, 这部分内容在美国四、五年级就教了, 而在新加坡教材中却没有出现.

新加坡的教材继续吸引着人们. 马萨诸塞州五个不同地区近二十所学校在North Middlesex的成绩激励下, 正在使用新加坡的试验教材.

在波士顿蓝领聚居的郊区Revere镇, Beachmont小学校长William Carey去年开始主动提出在一到四年级开始使用新加坡教材. 他反馈了一些初期的成果: Beachmont小学四年级在州统考中只比州平均分低了3个百分点, 而去年四年级与州平均分差8个百分点. 接着, Beachmont小学的成功, 也鼓励了其他人. 在城镇的另一端, Garfield小学的教师在今年开始用新加坡教材教学. "当情况开始发生变化, 人们就注意了," Beachmont的校长Carey先生说, "然后消息就不胫而走."

……………………………… 译自华尔街日报

(浙江省宁波效实中学　潘　青)

(上接第10–17页)

施普林格出版社.

[4] M.克莱因. 古今数学思想. 上海科学技术出版社.

[5] 张顺燕. 关于数学教学的若干认识. 数学教育学报. 2004.1.

[6] 柯召、孙琦. 单位分数. 人民教育出版社. 1981年版.

编后漫笔

我们能为改变"应试教育"做点什么?

张奠宙 赵小平

近来, 关于应试教育的危害再次引起社会的关注. 看来遏制应试教育的延续是整个社会的事. 本刊身在"数学教育圈"内, 总应该有新的认识, 新的作为, 新的呐喊.

首先是关于高考制度. 今年是废除科举制度100周年, 回顾历史, 大家的共识是, "科举取士、选拔人才"的历史作用非常重大, 但是考试的问题多多, 八股文害人非浅. 仅把考试作为"取士"的手段, 那么人才固然可以选拔出一些, 但是为人类进步研究科学, 为探究真理勇于献身的理想, 又将置于何地? 没有这样的志士仁人, 国家又怎能强大, 中华民族如何立于世界之林? 现在似乎一批评"应试教育", 就被认为"否定教育公平, 脱离中国国情". 实际上, 并没有人现在就要取消高考, 而是反对唯考试论, 唯分数论, 要探索在当前的社会条件下, 如何有效地培养人才和选拔人才. 如果我们任凭考试走向极端而不作为, 那么就会危害学生、危害社会, 最终必然会被社会所抛弃. 一百年前, 延续了近千年的科举考试制度轰然瓦解, 就是明证.

其次是关于高考命题. 当年王安石变法主张在科举中考策论, 联系现实, 考察举子们治国平天下的本领. 反对此举者很多, 包括司马光、苏轼等大家. 他们坚持主张考诗赋词经. 原因是策论的好坏, 由考官的主观好恶而定, 不甚公平; 至于诗赋词经, 有格律限制, 有原著为评判标准, 可以客观地分出高下, 做到公平考试, 客观评价, 由于这种观点占了上风, 并到明清时代走向极端, 八股文盛行. 读书人会作起承转合符合规矩的八股文, 却没有能力治理国家和发展科技, 使得吏治渐败, 科技落后. 科举之害, 渐渐为国人所痛恨, 最后连慈禧太后、袁世凯这样的保守派头子, 也觉得不能再维持. 科举制度终于寿终正寝.

现在的高考题, 当然不是"八股文". 但是, 考题年年稳定, 大家都围着那几类考题折腾, 探究能力考不出, 只能让熟练者得利, 这似乎和"八股"越走越近了. 姜伯驹院士最近在威海演讲时提出"考试的弹性越小, 题型变化越少, 题海战术的成本就越低, 收效就越高". 我们的高考数学命题格局几十年不变, 稳定有余, 变化不足. 命题应该改革, 要使那些热衷于搞题海战术的人占不到便宜. 例如, 把数学高考的考试时间延长为3小时, 考出学生的独立研究能力, 这是容易做到的事, 不知道为何不能采纳. 也许非不能也, 乃不为也.

(下转第10–42页)

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第10期
(总第217期)
主编: 张奠宙 赵小平
常务副主编: 忻重义
电 话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出 版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字 07017号
印 刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元 国内统一刊号: CN31–1024/G4 每月12日出版 代号: 4–357